

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

APLICAÇÃO DA TEORIA DE GRUPOS MAGNÉTICOS PARA GUIAS DE ONDA E  
CAVIDADES RESSONANTES COM MEIOS MAGNÉTICOS.

ANTONIO THIAGO MADEIRA BEIRÃO

DM 24 /2014

UFPA / ITEC / PPGEE  
Campus Universitário do Guamá  
Belém-Pará-Brasil  
2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

ANTONIO THIAGO MADEIRA BEIRÃO

APLICAÇÃO DA TEORIA DE GRUPOS MAGNÉTICOS PARA GUIAS DE ONDA E  
CAVIDADES RESSONANTES COM MEIOS MAGNÉTICOS.

DM 24 /2014

UFPA / ITEC / PPGE  
Campus Universitário do Guamá  
Belém-Pará-Brasil  
2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

ANTONIO THIAGO MADEIRA BEIRÃO

APLICAÇÃO DA TEORIA DE GRUPOS MAGNÉTICOS PARA GUIAS DE ONDA E  
CAVIDADES RESSONANTES COM MEIOS MAGNÉTICOS.

Dissertação submetida à Banca Examinadora do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da UFPA para a obtenção do Grau de Mestre em Engenharia Elétrica na área de Telecomunicações.

UFPA / ITEC / PPGEE  
Campus Universitário do Guamá  
Belém-Pará-Brasil  
2014

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

---

Beirão, Antonio Thiago Madeira, 1984-  
Aplicação da teoria de grupos magnéticos  
para guias de onda e cavidades ressonantes com  
meios magnéticos. / Antonio Thiago Madeira  
Beirão. - 2014.

Orientador: Victor Alexandrovich Dmitriev.  
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal  
do Pará, Instituto de Tecnologia, Programa de  
Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Belém,  
2014.

1. Guias de ondas. 2. Teoria eletromagnética.  
I. Título.

CDD 22. ed. 621.381331

---

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

APLICAÇÃO DA TEORIA DE GRUPOS MAGNÉTICOS PARA GUIAS DE ONDA E  
CAVIDADES RESSONANTES COM MEIOS MAGNÉTICOS.

AUTOR: ANTONIO THIAGO MADEIRA BEIRÃO

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA À AVALIAÇÃO DA BANCA  
EXAMINADORA APROVADA PELO COLEGIADO DO PROGRAMA DE PÓS-  
GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO  
PARÁ E JULGADA ADEQUADA PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM  
ENGENHARIA ELÉTRICA NA ÁREA DE TELECOMUNICAÇÕES.

APROVADA EM 27 / 08 / 2014

BANCA EXAMINADORA:

---

Prof. Dr. Victor Alexandrovich Dmitriev.  
(ORIENTADOR – UFPA)

---

Prof. Dr. Rodrigo Melo e Silva de Oliveira.  
(MEMBRO – UFPA)

---

Prof. Dr. Karlo Queiroz da Costa  
(MEMBRO – UFPA)

---

Prof. Dr. Ronaldo de Freitas Zampolo  
(MEMBRO – UFPA)

VISTO:

---

Prof. Dr. Evaldo Pelaes  
(COORDENADOR DO PPGEE/ITEC/UFPA)

## AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a Deus, por ter me iluminado nessa caminhada. E dado força, coragem e determinação para que não desistisse nos momentos de fraqueza;

À meus pais, Deolinda Maria da Costa Madeira e Antonio José Beirão, pelo apoio incondicional em todos os momentos de minha vida. Amo muito vocês.

Ao meu orientador Professor Dr. Victor Dmitriev, principal responsável pela concepção e desenvolvimento deste trabalho;

À UFPA (Universidade Federal do Pará), referência em ensino, pesquisa e extensão no Brasil;

A CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), por ter financiado as pesquisas relacionadas a este trabalho;

À meus irmãos, Kléber Madeira, Patrick Madeira, Alessandro Beirão e Carla Madeira, por sempre me ajudarem;

Aos amigos do Laboratório de Nanoeletrônica e Nanofotônica, Daimam Zimmer, Clérisson Nascimento, Thaís Tavares, Carlos Rafael, Gianni Portela, Marcelo Kawakatsu, Dionísio, André, Marcelino, Chicão, Bruno Wallacy, Leno, Leonardo, Fernando Gomes.

Por fim, agradeço ao PPGEE-UFPA, funcionários e todos os professores.

## LISTA DE SIGLAS

$C_n$  – Rotação de  $\frac{2\pi}{n}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

$\sigma$  – Reflexão em um plano;

$\sigma_h$  – Reflexão no plano horizontal;

$\sigma_v$  – Reflexão no plano vertical;

$\sigma_d$  – Reflexão no plano diagonal;

$i$  – Inversão.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Cavidade cúbica sem perturbação .....	7
Figura 2: Cavidade em forma de paralelepípedo sem perturbação .....	8
Figura 3. Geometria da cavidade cilíndrica .....	9
Figura 4. Seção transversal de guias de onda circular com magnetização azimutal. $\mathbf{H}_0$ é o campo magnético. a) Guia de onda com uma camada de ferrite, b) guia de onda com opostas magnetizações e com dupla camada de ferrite .....	22
Figura 5. Simetria de estruturas de guias de onda: Guia de onda circular preenchido com ferrite (a); Guia de onda planar acoplado preenchido com ferrite (b); Guia de onda strip com plasma magnetizado (c) .....	24
Figura 6. Seção transversal do guia de onda quadrado (a); Guia de onda preenchido com ferrite com magnetização longitudinal (b); Com magnetização circular (c); Com campo magnético quadrupolo (d); Com magnetização transversal (e); $\mathbf{H}_0$ é o campo magnético.....	25
Figura 7. Modo $TE_{11}$ (a); Modo $TM_{11}$ (b); Modo $TE_{10}$ (c); Modo $TE_{01}$ (d) .....	26
Figura 8. Seção transversal do guia de onda retangular (a); Guia de onda preenchido com ferrite com magnetização longitudinal (b); Com magnetização circular (c); Com campo magnético quadrupolo (d); Com magnetização transversal (e); $\mathbf{H}_0$ é o campo magnético .....	29
Figura 9. Modo $TE_{11}$ (a); Modo $TM_{11}$ (b); Modo $TE_{10}$ (c); Modo $TE_{21}$ (d) .....	30
Figura 10. Seção transversal do guia de onda circular (a); Guia de onda preenchido com ferrite com magnetização longitudinal (b); Com magnetização circular (c); Com quadrupolo do campo magnético (d); Com magnetização transversal (e); $\mathbf{H}_0$ é o campo magnético .....	31
Figura 11. a) Seção de guias de onda circular, grupo magnético é $D_{\infty h}(C_{\infty v})$ . b) Seção de guia de onda quadrado, grupo magnético $D_{4h}(C_{4v})$ . $\mathbf{H}_0$ é o campo magnético .....	33
Figura 12. seção de guia de onda retangular, $\mathbf{H}_0$ é o campo magnético .....	37
Figura 13. Cavidade cúbica com perturbação de campo magnético $\mathbf{H}_0$ paralelo ao eixo y .....	39



## LISTA DE TABELAS

Tabela 1. Classes de modos e modos degenerados para guia de onda com simetria $C_n$ .....	4
Tabela 2. Classes de modos e modos degenerados para guia de onda com simetria $C_{nv}$ .....	4
Tabela 3. Representações em série de Fourier dos campos elétricos e magnéticos para guias de ondas uniformes com simetria $C_n$ .....	6
Tabela 4. Tabela de caracteres de representações irredutíveis do grupo $C_{4v}$ .....	8
Tabela 5. Tabela de caracteres de representações irredutíveis do grupo $D_{2h}$ .....	8
Tabela 6. Tabela de caracteres representações irredutíveis do grupo $D_{\infty h}$ .....	9
Tabela 7. Classificação de automodos em cavidade cilíndrica de acordo com representações irredutíveis do grupo $D_{\infty h}$ .....	10
Tabela 8. Classificação de automodos em cavidade retangular de acordo com representações irredutíveis do grupo $D_{2h}$ .....	11
Tabela 9. Conteúdo dos grupos magnéticos de simetria .....	13
Tabela 10. Relações do subgrupo de um grupo $G$ e seu subgrupo $G'(H')$ .....	14
Tabela 11. Tabela de caracteres de representações irredutíveis do grupo $C_{4v}$ .....	25
Tabela 12. Tabela de caracteres de corepresentações irredutíveis do grupo $C_{4v}(C_4)$ .....	27
Tabela 13. Tabela de caracteres de corepresentações irredutíveis do grupo $C_{4v}$ .....	27
Tabela 14. Tabela de corepresentações irredutíveis do grupo magnético $C_{4v}(C_{2v})$ .....	27
Tabela 15. Tabela de caracteres de corepresentações irredutíveis do grupo magnético $C_{4v}(C_s)$ .....	27
Tabela 16. Tabela de caracteres de representações irredutíveis do grupo $C_{2v}$ .....	29
Tabela 17. Tabela de caracteres de corepresentações irredutíveis do grupo magnético $C_{2v}(C_2)$ .....	30
Tabela 18. Tabela de caracteres de corepresentações irredutíveis do grupo magnético $C_{2v}(C_s)$ .....	30
Tabela 19. Tabela de caracteres de corepresentações irredutíveis do grupo magnético $C_{2v}$ .....	31

## RESUMO

Neste trabalho aplicamos a teoria de grupos magnéticos em seções transversais de guias de ondas quadrado, retangular e circular preenchidos com ferrite ou material semicondutor com diferentes tipos de magnetização. Estes guias de ondas são estruturas usadas em tecnologia de microondas como *phase shifters*, *cut-off switches* e isoladores. Analogamente como feito em guias de ondas com diferentes simetrias, foram analisadas e classificadas também cavidades ressonantes com geometrias cúbica, paralelepípeda e cilíndrica utilizando teoria de grupos magnéticos. Considerando seções de guia de onda com quatro portas e usando métodos de teoria de grupo calculou-se a estrutura da matriz de espalhamento para estes guias com diferentes simetrias e são discutidas algumas de suas propriedades. Além disso, as matrizes de espalhamento obtidas para os modos  $TE_{0n}$  são exatas e, a partir delas, foram calculados os autovalores e autovetores destas matrizes. Os resultados obtidos servem como referência teórica para checar a precisão de cálculos numéricos em estruturas de guias de ondas.

**PALAVRAS-CHAVE:** Simetria , Grupo Magnético, Guias de Onda, Cavidades Ressonantes.

## ABSTRACT

In this paper we apply the theory of magnetic groups in cross sections of waveguides square, rectangular and circular filled with ferrite or semiconductor material with different types of magnetization. These wave guides are structures used in microwave technology as phase shifters, cut-off switches and insulators. Similarly as done in waveguides with different symmetries, were analyzed and classified also resonant cavities with cubic and cylindrical paralelepípeda geometries using group theory magnetic. Considering waveguide sections with four doors and using group theory methods calculated to scattering matrix structure for these guides with different Symmetries and are discussed some of its properties. Furthermore, scattering matrices obtained TE<sub>0n</sub> modes are accurate and, from them, were calculated eigenvalues and eigenvectors of matrices. The results serve as theoretical reference to check the accuracy of numerical calculations in structures of waveguides.

**KEYWORDS:** Symmetry, Magnetic group, Waveguides, Resonant Cavities.

## SUMÁRIO

INTRODUÇÃO .....	1
CAPÍTULO 1 .....	3
1.1 - Teoria de Grupos aplicados a guias de onda sem meio magnéticos .....	3
1.1.1 - Simetria de um guia de onda uniforme .....	3
1.1.2 - Classificação de modos e degenerescência .....	3
1.1.3 - Simetrias de campo magnético modal .....	5
CAPÍTULO 2 .....	7
2.1 - Teoria de Grupo aplicada a cavidades ressonantes não magnetizadas .....	7
2.2 - Cavidade cúbica .....	7
2.3 - Cavidade em forma de paralelepípedo .....	8
2.4 - Cavidade cilíndrica .....	9
2.5 - Classificação de automodos em cavidades ressonantes utilizando teoria de grupos .....	10
CAPÍTULO 3 .....	12
3.1 - Introdução à teoria de grupos magnéticos .....	12
3.2 - Operadores antiunitários .....	12
3.3 - Categoria de grupos magnéticos .....	12
3.4 - Corepresentações .....	14
3.5 - Grupos pontuais magnéticos contínuos de simetria .....	16
3.5.1 - Grupos magnéticos contínuos de simetria de primeira categoria .....	16
3.5.2 - Grupos magnéticos contínuos de simetria de segunda e terceira categoria .....	17
3.6 - Representação matricial de operadores de simetria espacial tridimensional .....	19
3.7 - Princípio de Curie de superposição de simetria .....	20
CAPÍTULO 4 .....	21
4.1 - Grupos magnéticos aplicados em guias de ondas .....	21
4.2 - Simetria de meio eletromagnético, guia de ondas e fontes .....	23
4.3 - Seções transversais de guias de ondas e teoria de grupos .....	25
4.3.1 - Guia de onda quadrado .....	26
4.3.2 - Guia de onda Retangular .....	28
4.3.3 - Guia de onda Circular .....	31
4.4 - Análise de guias de onda circular e quadrado .....	32

4.5 - Análise de guia de onda retangular .....	36
CAPÍTULO 5 .....	39
5.1 - Grupos magnéticos aplicados a cavidades ressonantes .....	39
CONCLUSÃO .....	41
APÊNDICE A .....	42
APÊNDICE B .....	46
BIBLIOGRAFIA .....	50

## INTRODUÇÃO

Análise de simetria pode ser efetivamente usada em muitos problemas que envolvem teoria eletromagnética. Podem-se aplicar em equações diferenciais, equações integrais, problemas variacionais e descrição de matriz de fenômenos eletromagnéticos. Em sistemas físicos, sistemas de coordenadas, descrição clássica ou mecânica quântica são fundamentais.

Simetria é uma transformação que deixa a estrutura relevante invariável. A coleção de simetrias de um objeto preserva a estrutura que forma o grupo. A teoria de grupos é um instrumento para estudar a simetria e as consequências de um dado sistema.

Os primeiros matemáticos que introduziram o conceito de teoria de grupos em álgebra no contexto das soluções de equações algébricas foram Evarist Galois e Niels Henrik Abel. No final do século XIX, Felix Klein e Sophus Lie desenvolveram a teoria de grupos discretos e grupos contínuos, respectivamente. O famoso teorema de Emmy Noether provado em 1917 afirma que todos os grupos de simetria das equações diferenciais origina uma quantidade que é preservada. Assim, o teorema diz respeito a grupos de simetria e leis de conservação. A introdução de métodos em teoria de grupos a mecânica quântica estão conectados com os nomes de H. Weyl, E. P Wigner, e outros. Vale frisar que Wigner recebeu em 1963 o prêmio Nobel de Física pela aplicação de princípios de simetria em teoria de partículas elementares.

As equações de Maxwell possuem alta simetria. Todas as soluções exatas das equações de onda em coordenadas retangulares, cilíndricas e esféricas seguem da simetria dessas equações diferenciais. Além disso, as soluções provenientes das equações de Maxwell são determinadas pelos seus grupos de simetria.

As propriedades de ortogonalidade e completude de senos e cossenos, exponenciais e funções especiais tais como Bessel, Legendre, Harmônicos esféricos e outras funções clássicas de física matemática são definidas por decomposição de simetria. A interpretação do grupo teórico pode ser dado também para fórmulas de recursão e teoremas de funções especiais.

A teoria de autovalores e autofunções para os casos simétricos pode ser facilmente convertida em linguagem de grupo teórico. Por exemplo, a frequência  $\omega$  é invariante devido a invariância do meio com respeito a operação de translação no tempo. As componentes cartesianas do vetor de onda  $k_x$ ,  $k_y$  e  $k_z$  para um meio infinito homogêneo são os autovalores contínuos que são invariantes devido a invariância do meio de propagação com respeito as translações nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente. A decomposição de ondas eletromagnéticas TE-TM decorre da operação de simetria de inversão. O índice  $m$  das ondas  $HE_{mn}$  e  $EH_{mn}$  para

guia de ondas dielétricos circulares é também definido pela simetria, e assim por diante.

Este trabalho tem por objetivo analisar teoria de grupos magnéticos aplicados em guias de ondas e cavidades ressonantes com diferentes simetrias; Investigar como modos de campo elétrico e magnético podem ser classificados de acordo com as representações irredutíveis da cavidade; Calcular matrizes de espalhamento para os modos  $TE_{0n}$  em guias de ondas com simetria quadrada e retangular; Calcular autovalores e autofunções das matrizes de espalhamento e Classificar automodos  $TE_{mnp}$  e  $TM_{mnp}$  em cavidades ressonantes com geometria cilíndrica e em forma de paralelepípedo.

O trabalho está dividido em cinco capítulos, sendo o capítulo 1 destinado a Teoria de grupos aplicados a guias de onda não magnetizados. O capítulo 2 trata-se da Teoria de grupo aplicada a cavidades ressonantes não magnetizadas. O capítulo 3 aborda a Teoria de grupos magnéticos. O capítulo 4 se refere a Grupos magnéticos aplicados em guias de ondas. E o capítulo 5 aborda Grupos magnéticos aplicados a cavidades de ressonadores. Por fim são discutidos os resultados e conclusões.

# CAPÍTULO 1

## GUIAS DE ONDA SEM MAGNETIZAÇÃO

1.1 – Teoria de Grupos aplicados a guias de onda sem meio magnéticos.

1.1.1 – Simetria de um guia de onda uniforme [20].

A simetria de um guia de onda controla várias características importantes de seus modos de propagação. Uma determinação do tipo de simetria em um guia de onda permite classificar os modos possíveis no guia e prever sua degenerescência. Tudo isso pode ser realizado a partir de um conhecimento da simetria do guia de onda, sem precisar resolver a equação diferencial que modela a estrutura do modelo estudado.

A solução para os campos eletromagnéticos modais de um guia de ondas em uma frequência particular envolve a solução de um problema de autovalores, onde estes são os valores de  $\gamma(\omega)$ . Para qualquer modo de um guia de ondas uniforme, os campos elétricos e magnéticos transversais podem ser expressos em termos de componentes longitudinais,  $\mathbf{E}_z$  e  $\mathbf{H}_z$ . Por conseguinte, os pares de  $\mathbf{E}_z$  e  $\mathbf{H}_z$ , formam as autofunções do problema. Para um guia de onda uniforme, as equações diferenciais parciais e as condições de contorno para  $\mathbf{E}_z$  e  $\mathbf{H}_z$  envolvem apenas as coordenadas transversais. Como consequência, apenas a simetria da seção transversal do guia de onda tem de ser considerada. Isso restringe os tipos de guia de onda de simetria relevantes para apenas duas famílias em geral.

Uma operação de simetria em uma figura espacial é uma transformação que deixa a figura inalterada após esta transformação. Para uma figura bidimensional, existem apenas dois tipos de operações de simetria; rotações em torno de um eixo de simetria orientada perpendicularmente ao plano da figura, e as reflexões de planos orientados perpendicularmente ao plano da figura (ver apêndice 1).

1.1.2 – Classificação de modos e degenerescência [20].

O número de simetrias azimutais distintas dos padrões de campo eletromagnético modais para uma estrutura de um tipo de simetria dada é  $C_n$  ou  $C_{nv}$ , é da ordem de  $n$ . Assim, os modos de um guia de onda podem ser atribuídos a classes dependendo da simetria azimutal dos padrões do campo modal. Essas classes serão chamadas classes de modo, e cada uma contém um número infinito de modos.

Os campos eletromagnéticos para todos os modos em uma classe de determinado modo terá a mesma simetria azimutal, embora a dependência dos campos eletromagnéticos



sobre a coordenada azimutal será diferente. As principais diferenças entre os padrões de campo eletromagnético para modos diferentes no mesmo modo de classe não são iguais em suas variações radiais. Para guias de onda com simetria  $C_n$  existem  $n$  diferentes modos de classes, enquanto para simetria  $C_{nv}$  existem  $n+1$  (para  $n$  ímpar) e  $n+2$  (para  $n$  par) distintos modos de classes.

O campo magnético de um modo particular pode ser escrito por duplo índice, como exemplo  $\mathbf{E}_{pq}$  e  $\mathbf{H}_{pq}$ . O primeiro índice  $p$  indica a classe de modo, enquanto o índice  $q$  distingue o  $p$ -ésimo modo de classe. Para guias de onda com simetria  $C_n$ ,  $1 \leq p \leq n$ . Enquanto para guias de onda com simetria  $C_{nv}$ ,  $1 \leq p \leq n+1$  se  $n$  é ímpar ou  $1 \leq p \leq n+2$  se  $n$  é par. Pode ser mostrado que todos os modos em uma classe não são degenerados, ou que são degenerados com o modo correspondente no modo de classe complementar. Modos degenerados podem ocorrer apenas em pares. Para um dado guia de onda com dada simetria, o número de modo de classes degenerados e não degenerados são conhecidos. As tabelas 1 e 2 apresentam modo de classes e suas respectivas degenerescências para guia de ondas com simetria  $C_n$  e  $C_{nv}$ , respectivamente.

Tabela 1. Classes de modos e modos degenerados para guia de onda com simetria  $C_n$  [20].

$n$	Número de classes de modos não degenerados	Número de pares de classes de modos degenerados	Total de classes de modos
ímpar	1	$(n-1)/2$	$n$
par	2	$(n-2)/2$	$n$

Tabela 2. Classes de modos e modos degenerados para guia de onda com simetria  $C_{nv}$  [20].

$n$	Número de classes de modos não degenerados	Número de pares de classes de modos degenerados	Total de classes de modos
Ímpar	2	$(n-1)/2$	$n+1$
Par	4	$(n-2)/2$	$n+2$

Um comentário sobre as possíveis degenerescências de um guia de onda uniforme deve ser feita. As degenerescências descritas aqui são todas produzidas pela simetria do guia

de onda e ocorrerão para todos os valores de  $\omega$ . Além disso, vale frisar que análise de simetria pode prever corretamente os modos de degenerescência de um guia de onda, somente se todas as operações de simetria da estrutura são contabilizadas. Nem todas operações de simetria envolvem apenas operações de rotações e reflexões espaciais. Existem outros tipos de operações.

Aqui é suficiente afirmar que as tabelas 1 e 2 aplicam-se a todos os guias de onda não homogêneos da classe geral considerada, e a todos os guias de onda homogêneos, com exceção dos três casos especiais de guia retangular homogêneo, guia quadrado, circular e com fronteiras fechadas. Por exemplo, a Tabela 2 prevê corretamente as características de modo de guias de onda homogêneos de seção transversal elíptica, com uma parede de condução perfeita, cujos modos foram classificados. O guia de onda elíptico tem o mesmo grupo de simetria,  $C_{2v}$  que um guia de onda retangular [3].

### 1.1.3 – Simetrias de campo magnético modal [20].

A característica que distingue fisicamente as classes de modo de uma guia de onda particular é a simetria azimutal dos campos eletromagnéticos. Uma maneira de mostrar analiticamente a simetria azimutal das componentes longitudinais dos campos elétricos e magnéticos é expressá-las em termos de séries de Fourier no ângulo azimutal  $\theta$ . Por exemplo, os componentes elétricos e magnéticos longitudinais de campo para os modos de classe não degenerado de uma guia de onda com simetria  $C_3$ , podem ser expressos por:

$$E_{z1q}(r,\theta) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} A_{1qv}(r) \exp(j3v\theta) \quad (1)$$

$$H_{z1q}(r,\theta) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} B_{1qv}(r) \exp(j3v\theta). \quad (2)$$

O índice  $q$  indica que este é o  $q$ -ésimo modo de classe. Observe que na série de Fourier, apenas um terço dos possíveis termos que ocorrem numa série de Fourier geral estão presentes para esta classe modo. Este resultado para este modo de classe é uma consequência da simetria do guia de onda. A análise de simetria não fornece possibilidade para obter os coeficientes  $A_{1qv}$  e  $B_{1qv}$ . Para calcular estes coeficientes deve-se resolver a equação diferencial parcial do sistema associado às apropriadas condições de contorno do problema. Pode-se concluir a partir da série de Fourier em (1) e (2) que os campos eletromagnéticos para os modos nesta classe-modo devem ser periódicas em  $\theta$  com período  $2\pi/3$  rad. Assim, em qualquer análise numérica dos modos não degenerados deste guia de onda, os quais pertencem a esta classe de modo (ver tabela 1), apenas um setor de ângulo  $2\pi/3$  rad

necessitam de ser considerados (com as condições em que os campos eletromagnéticos devem ser idênticos para os dois limites azimutais do setor). Além disso, a Tabela 3 apresenta a forma geral da série de Fourier para as componentes longitudinais dos campos elétricos e magnéticos para guias de onda com simetria  $C_n$ . Observe que a Tabela III dá a dependência azimutal explícita de  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$ , para as classes de modo de guias de onda com simetria  $C_\infty$ .

Embora a simetria azimutal dos campos elétrico e magnético longitudinais para as várias classes de modo será apresentada por escrito. Outras representações podem muito bem ser preferíveis para um estudo numérico de um guia de onda particular. O objetivo da utilização desta representação em série de Fourier aqui, é para ser capaz de extrair informações facilmente acessíveis sobre a simetria azimutal dos campos eletromagnéticos modais.

Tabela 3. Representações em série de Fourier dos campos elétrico e magnético para guias de ondas uniformes com simetria  $C_n$ .

n	Classe de modos p	$E_{zpq}$	$H_{zpq}$
Par, ímpar	1	$\sum_{v=-\infty}^{\infty} A_{1qv}(r) \exp(jnv\theta)$	$\sum_{v=-\infty}^{\infty} B_{1qv}(r) \exp(jnv\theta)$
Par, ímpar	k	$\sum_{v=-\infty}^{\infty} A_{kqv}(r) \exp j(nv + k/2)\theta$	$\sum_{v=-\infty}^{\infty} B_{kqv}(r) \exp j(nv + k/2)\theta$
Par, ímpar	k+1	$\sum_{v=-\infty}^{\infty} A_{(k+1)qv}(r) \exp j(nv - k/2)\theta$	$\sum_{v=-\infty}^{\infty} B_{(k+1)qv}(r) \exp j(nv - k/2)\theta$
Par	n	$\sum_{v=-\infty}^{\infty} A_{nqv}(r) \exp jn(v-1/2)\theta$	$\sum_{v=-\infty}^{\infty} B_{nqv}(r) \exp jn(v-1/2)\theta$
$\infty$	1	$A_{1q}(r)$	$B_{1q}(r)$
$\infty$	k	$A_{kq}(r) \exp(jk\theta/2)$	$B_{kq}(r) \exp(jk\theta/2)$
$\infty$	k+1	$A_{(k+1)q}(r) \exp(-jk\theta/2)$	$B_{(k+1)q}(r) \exp(-jk\theta/2)$

## CAPÍTULO 2

### CAVIDADES RESSONANTES SEM MAGNETIZAÇÃO

#### 2.1 – Teoria de Grupo aplicada a cavidades ressonantes não-magnetizadas.

A propagação de ondas eletromagnéticas em regiões confinadas tem natureza diferente da propagação no espaço livre. De fato, apesar de  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  satisfazerem a mesma equação de onda, a presença de superfícies confinantes impõe condições de contorno sobre os campos, modificando seu comportamento [16].

Essas considerações apresentam grande importância tecnológica, pois tubos metálicos, guias de onda, constituem uma maneira prática para transmitir energia eletromagnética na região de microondas e cabos dielétricos (fibras ópticas) na região do infravermelho e do visível.

#### 2.2 – Cavidade cúbica.

Estudaremos agora alguns tipos de cavidades ressonantes. Estas “caixas” metálicas são úteis para o confinamento de modos eletromagnéticos de frequência bem definida [16]. Utilizaremos a teoria de grupos para cada simetria de cavidades ressonantes e com isso, poderemos analisar o grupo de simetria formado para cada caso de geometria estudada. Começaremos com a cavidade cúbica preenchida com ferrite descrita pela figura 1. Neste caso, não há perturbação sobre a cavidade, caracterizado desta maneira por um grupo de simetria não magnético  $C_{4v}$ .

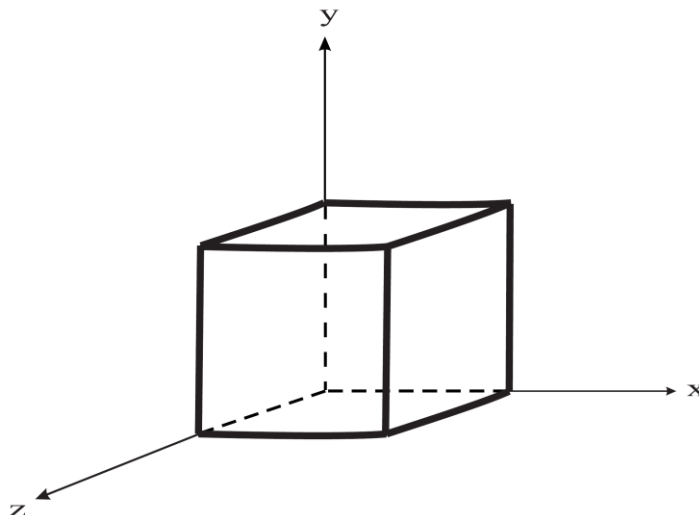


Figura 1. Cavidade cúbica sem perturbação.

A cavidade descrita pela figura 1 apresenta tabela de caracteres de representações de grupo irreduzível dado pela tabela a seguir. Nesta cavidade, temos grupo de simetria dado por  $C_{4v} = \{E, C_2, C_4, C_4^{-1}, \sigma_z, \sigma_y, \sigma_x, \sigma_{d1}, \sigma_{d2}\}$ .

Tabela 4. Tabela de caracteres de representações irreduzíveis do grupo  $C_{4v}$ .

$C_{4v}$	E	$C_2$	$C_4$	$C_4^{-1}$	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\sigma_{d1}$	$\sigma_{d2}$
$A_1$	1	1	1	1	1	1	1	1
$A_2$	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
$B_1$	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
$B_2$	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
E	2	-2	0	0	0	0	0	0

### 2.3 – Cavidade em forma de paralelepípedo.

Em seguida, vamos considerar uma cavidade em forma de paralelepípedo, conforme indica a figura a seguir. Nesta cavidade temos grupo de simetria dado por  $D_{2h} = \{E, C_{2z}, C_{2y}, C_{2x}, I, \sigma_z, \sigma_y, \sigma_x\}$ , onde  $C_{2z}, C_{2y}, C_{2x}$  são rotações de  $180^\circ$  sobre os eixos  $z, y$  e  $x$  respectivamente, e  $\sigma_z, \sigma_y, \sigma_x$  são reflexões nos planos  $x-y, z-x$  e  $y-z$ , respectivamente. Vale frisar também que os caracteres deste grupo de simetria são dados pela tabela 5.

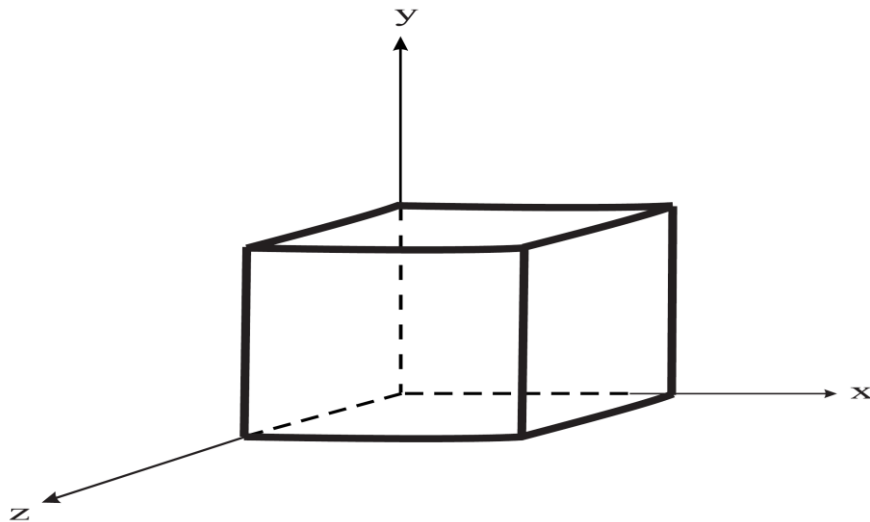


Figura 2. Cavidade em forma de paralelepípedo sem perturbação.

Tabela 5. Tabela de caracteres de representações irredutíveis do grupo  $D_{2h}$ .

$D_{2h}$	E	$C_2^z$	$C_2^y$	$C_2^x$	I	$\sigma_z$	$\sigma_y$	$\sigma_x$
$A_g$	1	1	1	1	1	1	1	1
$B_{1g}$	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
$B_{2g}$	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
$B_{3g}$	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
$A_u$	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
$B_{1u}$	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
$B_{2u}$	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
$B_{3u}$	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1

#### 2.4 – Cavidade cilíndrica.

Seja uma cavidade cilíndrica conforme a figura 3, definimos o eixo de coordenadas no centro da cavidade, com altura do cilindro na direção do eixo  $z$ , conforme é mostrado a seguir. Esta cavidade é simétrica sobre operações do grupo de simetria, dado por  $D_{\infty h} = \{E, C(\alpha), \sigma_v, I, IC(\alpha), I\sigma_v\}$ , onde  $E$  é a operação identidade;  $C(\alpha)$  são rotações através do ângulo  $\alpha$  sobre o eixo  $z$ ;  $\sigma_v$  são reflexões no plano contendo o eixo  $z$ ;  $I$  denominada de operação inversão. Além disso, o grupo  $D_{\infty h}$  tem quatro representações unidimensionais, denominadas  $A_{1g}$ ,  $A_{1u}$ ,  $A_{2g}$  e  $A_{2u}$ ; e infinitas representações bidimensionais  $E_{ng}$  e  $E_{nu}$ , onde os sufixos  $g$  e  $u$  indicam respectivamente as paridades par e ímpar sobre a inversão, e  $n$  é um número inteiro que indica um índice azimutal. Observe que existem infinitos números de rotações e reflexões.

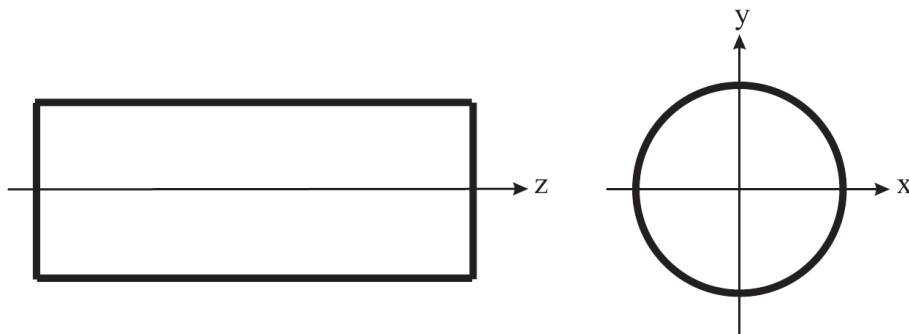


Figura 3. Geometria da cavidade cilíndrica.

As representações irredutíveis do grupo  $D_{\infty h}$  são dadas pela tabela 6. Esta tabela mostra os caracteres correspondentes de cada operação e cada representação irredutível associada. Os caracteres são definidos pelo traço da matriz de representação. Observe que para representações irredutíveis bidimensionais temos um conjunto de traços de matrizes.

Tabela 6. Tabela de caracteres representações irredutíveis do grupo  $D_{\infty h}$ .

$D_{\infty h}$	E	$C(\alpha)$	$\sigma_v$	I	$IC(\alpha)$	$I\sigma_v$
$A_{1g}$	1	1	1	1	1	1
$A_{1u}$	1	1	-1	-1	-1	1
$A_{2g}$	1	1	-1	1	1	-1
$A_{2u}$	1	1	1	-1	-1	-1
$E_{1g}$	2	$2\cos(\alpha)$	0	2	$2\cos(\alpha)$	0
$E_{1u}$	2	$2\cos(\alpha)$	0	-2	$-2\cos(\alpha)$	0
$E_{2g}$	2	$2\cos(2\alpha)$	0	2	$2\cos(2\alpha)$	0
$E_{2u}$	2	$2\cos(2\alpha)$	0	-2	$-2\cos(2\alpha)$	0
...	...	...	...	...	...	...
$E_{ng}$	2	$2\cos(n\alpha)$	0	2	$2\cos(n\alpha)$	0
$E_{nu}$	2	$2\cos(n\alpha)$	0	-2	$-2\cos(n\alpha)$	0

### 2.5 – Classificação de automodos em cavidades ressonantes utilizando teoria de grupos.

Cavidades ressonantes são caracterizadas por sua simetria. Alta simetria de uma cavidade simplifica sua análise para modos ressonantes. Para classificar os automodos em cavidades com dada simetria, aplicamos o estudo de teoria de grupos. Usando funções de base sobre o conjunto completo de automodos, podemos formar representações do grupo de simetria da cavidade e, portanto, podemos classifica-los de acordo com representações irredutíveis do grupo de simetria [19]. Além disso, vale frisar que este método é utilizado particularmente em cavidades complexas e para compreensão de efeitos de perturbações sobre os mesmos.

Os automodos da cavidade cilíndrica são dados por  $TE_{nmp}$  e  $TM_{nmp}$ , onde  $n$ ,  $m$  e  $p$  são números inteiros. Investigando como os modos de campo elétrico transformam sob as operações de simetria, esses modos podem ser classificados de acordo com as representações irredutíveis desta cavidade, de acordo com a tabela abaixo.

Tabela 7. Classificação de automodos em cavidade cilíndrica de acordo com representações irredutíveis do grupo  $D_{\infty h}$ .

Representações irredutíveis	Automodos
$A_{1g}$	$TM_{0mp}$ (p: ímpar)
$A_{1u}$	$TE_{0mp}$ (p: par)
$A_{2g}$	$TE_{0mp}$ (p: ímpar)
$A_{2u}$	$TM_{0mp}$ (p: par)
$E_{ng}$ ( $n \geq 1$ )	$TE_{nmp}$ , $TM_{nmp}$ ( $n+p$ : ímpar)
$E_{nu}$ ( $n \geq 1$ )	$TE_{nmp}$ , $TM_{nmp}$ ( $n+p$ : p)

Tabela 8. Classificação de automodos em cavidade retangular de acordo com representações irreduzíveis do grupo  $D_{2h}$ .

$D_{2h}$	n	m	p
$A_g$	ímpar	ímpar	Ímpar
$B_{1g}$	par	par	ímpar
$B_{2g}$	par	ímpar	par
$B_{3g}$	ímpar	par	par
$A_u$	par	par	par
$B_{1u}$	ímpar	ímpar	par
$B_{2u}$	ímpar	par	ímpar
$B_{3u}$	par	ímpar	ímpar

Os automodos das cavidades retangulares e cilíndricas são dados por  $TE_{nmp}$  e  $TM_{nmp}$ , onde n, m e p são números inteiros. Investigando como os modos de campo elétrico transformam sob as operações de simetria, esses modos podem ser classificados de acordo com as representações irreduzíveis destas cavidades, de acordo com a tabela 7 e tabela 8, respectivamente.



## CAPÍTULO 3

### GRUPOS MAGNÉTICOS

#### 3.1 – Introdução à teoria de grupos magnéticos.

Para estruturas magnéticas é necessário incluir o operador de inversão temporal  $T$  que escolhe o sinal de  $(t) \rightarrow (-t)$  e combinações de operações de simetria do espaço com  $T$ . Este operador comuta com todos os elementos espaciais e tem também a propriedade  $TT = T^2 = e$  [1]. O operador  $T$  pertence à chamada classe de operadores antilineares. Estes na grande maioria tem as mesmas propriedades dos operadores lineares. As diferenças surgem quando a operação de complexo conjugado é envolvida. Um operador antilinear é definido tal que satisfaça a seguinte condição:

$$\mathbf{T}(c\mathbf{V}) = c^* \mathbf{T}\mathbf{V} \quad (3)$$

onde  $\mathbf{V}$  é um autovetor do problema,  $c$  é uma constante complexa e a operação  $*$  significa complexo conjugado. Portanto, um operador antilinear, ao contrário do linear, não comuta com números complexos.

#### 3.2 – Operadores antiunitários.

O operador de inversão temporal  $T$ , ao ser combinado com operadores espaço-temporais, que pode ser representado pelo produto de  $T$  e operador espacial de rotação-reflexão, é também operador antiunitário. Um operador antiunitário é antilinear quando satisfaz a condição unitária, isto é, conserva a magnitude do produto escalar [1]:

$$|\mathbf{T}\mathbf{V}_i, \mathbf{T}\mathbf{V}_j| = |\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_j| \quad (4)$$

Operadores antiunitários diferem de operadores unitários pelo esquema de multiplicação. Um exemplo de operador antiunitário é o operador de complexo conjugado.

#### 3.3 – Categoria de grupos magnéticos.

Existem três categorias de grupos magnéticos pontuais contínuos e discretos. O grupo da primeira categoria consiste de um subgrupo unitário  $H$  (neste estudo, contém elementos usuais de rotação e reflexão) e produto de  $T$  com todos elementos de  $H$ . O grupo completo é

então  $H+TH$ , incluindo  $T = Te$ , onde  $e$  é o elemento unidade. Algumas vezes, estes grupos são chamados de não magnéticos.

No caso de grupos magnéticos de segunda categoria  $\mathbf{G}$ , não existem elementos espaciais combinados com o operador de inversão temporal  $T$  e este não é elemento do grupo. A nomenclatura e as notações dos grupos de primeira categoria (não magnéticos) e de segunda categoria (magnéticos) coincidem, porém a ordem os distingue [1].

Os grupos magnéticos de terceira ordem  $G(H)$  contem, além do elemento unitário  $u_i$  do subgrupo unitário  $H$ , um número igual de elementos antiunitários  $a_j$  que são produtos de  $T$  com elementos de simetria geométrica usual. Estes elementos combinados formam uma classe conjugada  $TH'$  do subgrupo  $H$  e leva a existência de anti-eixos, anti-planos e anti-centros de simetria. O grupo completo é  $H + TH'$  sem  $T$ . Observe que os elementos de  $H'$  são diferentes daqueles de  $H$  [1].

Os elementos unitários de um grupo magnético de terceira categoria formam um subgrupo unitário de índice 2. Isto significa que em muitos grupos de terceira ordem existem números de elementos iguais com e sem  $T$ . Em contraste, para um grupo de primeira categoria, o mesmo operador  $T$  não é um elemento do grupo magnético de terceira categoria [1]. O conteúdo das três categorias dos grupos magnéticos é apresentado na tabela a seguir.

Tabela 9. Conteúdo dos grupos magnéticos de simetria.

Primeira categoria	Segunda categoria	Terceira categoria
$G = H + TH$	$\mathbf{G}$	$G(H) = H + TH', H \neq H'$
Inclui $\mathbf{T}$	Sem $\mathbf{T}$	$T$ apenas em combinação com rotações e reflexões.

Na literatura russa [1], os grupos de primeira categoria são chamados neutros (ou cinzentos), os grupos de segunda categoria são denominados polares (ou de uma cor), e os grupos da terceira categoria são denominados duas cores. Se um grupo magnético de terceira categoria  $G'(H')$  é um subgrupo de um grupo não magnético  $G$  que tem a estrutura  $G = H + TH$ , as relações do subgrupo são dadas na tabela 9.

As setas na tabela 10 demonstram que  $H$  e  $H'$  são subgrupos unitários de  $G$  e  $G'$  respectivamente, e  $G'$  e  $H'$  são subgrupos de  $G$  e  $H$ , respectivamente. Tais relações devem

existir, por exemplo, para uma estrutura que é descrita por um grupo  $G$  em estado não magnético e por um grupo  $G'(H')$  depois da aplicação do campo magnético.

Tabela 10. Relações do subgrupo de um grupo  $G$  e seu subgrupo  $G'(H')$ .

	Grupo não unitário		Subgrupo unitário
Grupo não magnético	$G$	$\rightarrow$	$H$
	$\downarrow$		$\downarrow$
Grupo magnético	$G'$	$\rightarrow$	$H'$

Geradores de um grupo de simetria podem ser escolhidos de diferentes maneiras. Para um grupo de primeira e segunda categoria, usualmente podemos usar um, dois ou mais de três geradores. Isto dependerá do grupo [1]. Neste caso de simetria de grupos magnéticos de terceira categoria  $G(H)$ , pode-se definir, por exemplo, geradores do subgrupo unitário  $H$  e qualquer elemento antiunitário. Segue sobre o fato que outros elementos antiunitários devem ser obtidos multiplicando este elemento antiunitário por todos os elementos unitários. Tal escolha de geradores é útil em problemas de tensor constitutivo e cálculos de matriz de espalhamento, pois reduz o volume de tais cálculos.

### 3.4 – Corepresentações.

Juntamente com representações de matrizes que podem ser escritas para grupos unitários, Wigner [10] introduziu a chamada corepresentação (o termo “corepresentação” lembra um dos sinais complexo conjugado no esquema de multiplicação matricial). Estes sistemas de matrizes descrevem o grupo de simetria que contém elementos unitários  $u_i$  e antiunitários  $a_i$ , isto é, os grupos da terceira categoria.

O esquema de multiplicação para estes casos é mais complicado do que para os grupos de primeira e segunda categoria escritos na equação (5). É como segue:

$$\bar{R}_{u_i} \cdot \bar{R}_{u_j} = \bar{R}_{u_i u_j}, \quad \bar{R}_{u_i} \cdot \bar{R}_{a_j} = \bar{R}_{u_i a_j}, \quad (5)$$

Duas corepresentações são chamadas equivalentes, se puderem ser transformadas uma na outra utilizando uma matriz unitária  $\bar{L}$ :

(6)

$$\bar{\mathbf{R}}'_u = [\bar{\mathbf{L}}]^{-1} \cdot \bar{\mathbf{R}}_u \cdot \bar{\mathbf{L}}, \quad \bar{\mathbf{R}}'_a = [\bar{\mathbf{L}}]^{-1} \cdot \bar{\mathbf{R}}'_a \cdot [\bar{\mathbf{L}}]^*.$$

O conceito de simetria é usado em muitos problemas na física. Uma das definições de simetria diz [15]: “Se as leis, que governam as correlações entre as quantidades caracterizando um sistema físico, ou certa mudança desta quantidade com tempo, não se alteram sob certas transformações, isto é, é dito que estas leis possuem simetria, ou estas são invariantes em relação a estas transformações”. No sentido matemático, as transformações de simetria formam um grupo.

Princípios de simetria são, muitas vezes, usados como uma ferramenta para testar e validar novas teorias físicas. Neste sentido, elas são maiores do que teorias físicas e leis.

Em teoria eletromagnética clássica, baseadas sobre as equações de Maxwell complementada com relações constitutivas, considera-se as seguintes simetrias:

(I) Simetrias de espaço e tempo contínuos que incluem:

- Translações separadas no espaço e tempo
- Rotações no espaço
- Combinação da simetria do espaço-tempo contínuo

(II) Simetrias discretas de espaço e tempo que consistem de:

- Translações discretas no espaço
- Rotações discretas no espaço
- Inversão espacial
- Inversão temporal
- Combinações de transformações discretas de inversão temporal e espacial

(III) Transformações de inversão temporal e espacial combinadas:

Se existir simetria de um objeto físico as equações de Maxwell e todos os corolários deles, tal como equações da onda, equações integrais de espalhamento eletromagnético ou equações algébricas de teoria de circuitos, são invariantes sobre as propriedades de transformações de simetria. Isto leva a uma importante consequência nas soluções das equações. A simetria de estruturas físicas com translações contínuas no espaço (homogeneidade do espaço), tempo (homogeneidade do tempo), e rotações (isotropia do espaço) fornecem a conservação do momento linear, energia e momento angular, respectivamente.

As estruturas de guias de onda apresentadas, neste trabalho, possuem usualmente um ou vários elementos de simetria. Analisando uma dada estrutura, deve-se considerar separadamente a simetria dos diferentes constituintes: material preenchendo o guia de onda; a geometria e as condições de contorno; as fontes eletromagnéticas excitantes e o ambiente físico (perturbações); e, além disso, as propriedades eletromagnéticas de guias de onda, pois estas dependem da simetria da estrutura estudada.

3.5 – Grupos pontuais magnéticos contínuos de simetria.

3.5.1 – Grupos magnéticos contínuos de simetria de primeira categoria.

Toda seguinte discussão de simetria de problemas em guias de onda é válido para qualquer tipo de simetria magnética pontual. Os 21 grupos contínuos de primeira, segunda e terceira categoria ocupam um especial lugar no sistema de grupos pontuais, pois:

- a) Eles descrevem um grande número de objetos físicos tais como: campo elétrico, campo magnético, meios e guia de ondas.
- b) Alguns efeitos físicos são exibidos na media descrita pelos grupos contínuos na forma pura.

Abaixo é dada uma pequena descrição de elementos de simetria para estes grupos. Iniciaremos com 7 grupos de primeira categoria que são algumas vezes chamados de não magnéticos.

(1) O grupo  $K_h$  tem os seguintes elementos de simetria:

- Um número infinito de eixos  $C_\infty$  de uma ordem infinita,
- Um número infinito de planos,
- Centro de simetria  $i$ .

(2) O grupo  $K$  contém:

- Um número infinito de eixos  $C_\infty$ , sem planos e sem centro.

Sem perda de generalidade, o eixo  $C_\infty$  deve ser orientado ao longo do eixo  $z$  para todos os casos de grupos contínuos com um eixo principal.

(3) O grupo  $D_{\infty h}$  tem:

- Um eixo principal  $C_\infty$ ,
- O plano de simetria  $z = 0$  (este plano é denotado por  $\sigma_h$ ),
- Um número infinito de eixos duplos  $C_2$  no plano  $z = 0$ ,
- Um número infinito de planos (denotados por  $\sigma_v$ ) passando através do eixo  $C_\infty$ ,
- Centro de simetria  $i$ .

(4) O grupo  $D_{\infty}$  é caracterizado por:

- Um eixo principal  $C_{\infty}$ ,
- Um número infinito de eixos duplos  $C_2$  no plano  $z = 0$ .

(5) O grupo  $C_{\infty v}$  tem:

- O eixo principal  $C_{\infty}$
- Um número infinito de planos  $\sigma_v$  passando através deste eixo.

(6) O grupo  $C_{\infty h}$  possui:

- O eixo principal  $C_{\infty}$ ,
- O plano  $\sigma_h$ ,
- Centro de simetria  $i$ .

(7) O grupo  $C_{\infty}$  tem:

- Um eixo  $C_{\infty}$ .

Todos os grupos magnéticos de simetria de primeira categoria  $G$  contém o operador de inversão temporal  $T$  e o produto dele com todos os elementos de simetria geométrica  $H$  e, dessa maneira, o grupo será dado por  $G = H + TH$ .

### 3.5.2 - Grupos magnéticos contínuos de simetria de segunda e terceira categoria.

Objetos magnéticos exigem grupos magnéticos de segunda e terceira categoria para sua descrição. A nomenclatura dos 7 grupos de segunda categoria não diferem dos grupos de primeira categoria. A fim de distingui-los, os grupos de segunda categoria serão escritos em negrito. Mas o conteúdo das duas categorias de grupos é diferente.

Modelos geométricos de grupos magnéticos podem ser apresentados por figuras com corrente elétrica produzindo campo magnético entre os 7 grupos de terceira categoria, juntamente com as rotações e reflexões geométricas usuais, combinadas com elementos de inversão espacial-temporal [1]. Agora, considera-se o conteúdo destes grupos em detalhes.

(1) O grupo  $K_h(K)$  contém:

- Um número infinito de eixos  $C_{\infty}$ ,
- Um número infinito de antiplanos  $T\sigma$  passando pela origem.
- Anticentro de simetria  $Ti$ .

(2) O grupo  $D_{\infty h}(D_{\infty})$  tem:

- Um eixo principal  $C_{\infty}$

- Um número infinito de antiplanos  $T\sigma_v$  passando através do eixo  $C_\infty$ ,
  - Um número infinito de eixos duplos  $C_2$  falsos no antiplano  $T\sigma_h$ ,
  - Anticentro de simetria.
- (3)  $D_{\infty h}(C_{\infty v})$  tem os seguintes elementos de simetria:
- Um eixo principal  $C_\infty$ ,
  - Um número infinito de planos  $\sigma_v$  passando através do eixo  $C_\infty$ ,
  - Um antiplano de simetria  $T\sigma_h$  que é perpendicular ao eixo principal,
  - Um número infinito de anti-eixos duplos  $TC_2$  falsos no antiplano  $T\sigma_h$ ,
  - Anticentro.
- (4) O grupo  $D_{\infty h}(C_{\infty h})$  contém:
- Um eixo principal  $C_\infty$ ,
  - Um plano  $\sigma_h$ ,
  - Centro  $i$
  - Um número infinito de anti-eixos duplos  $TC_2$  normal ao eixo principal,
  - Um número infinito de antiplanos  $T\sigma_v$  passando através do eixo  $C_\infty$ .
- (5) O grupo  $D_\infty(C_\infty)$  consiste de:
- Eixo principal  $C_\infty$
  - Um número infinito de anti-eixos duplos  $TC_2$  normal ao eixo principal.
- (6) O grupo  $C_{\infty v}(C_\infty)$  contém
- Eixo principal  $C_\infty$ ,
  - Um número infinito de Antiplanos  $T\sigma_h$ , passando através do eixo principal.
- (7) O grupo  $C_{\infty h}(C_\infty)$
- Eixo principal  $C_\infty$ ,
  - Antiplano  $T\sigma_h$ ,
  - Anticentro.

Os grupos magnéticos de segunda categoria são subgrupos dos grupos de primeira categoria, pois estes últimos contém um elemento adicional T, inversão temporal, e também o produto de T com todos os elementos espaciais.

### 3.6 - Representação matricial de operadores de simetria espacial tridimensional.

Na ordem para descrever operações de simetria em espaço tridimensional tais como rotações e reflexões, devemos usar representações matriciais tridimensional de grupos pontuais. Cada elemento de um grupo correspondendo a uma simetria espacial pode ser apresentada por uma matriz  $\bar{\mathbf{R}}$  real não singular e ortonormal quadrada 3x3. As matrizes  $\bar{\mathbf{R}}$  estão relacionadas com rotações próprias e impróprias positivas (sentido horário – direção positiva do eixo) através de um ângulo  $\alpha$  sobre os eixos x, y e z são:

$$\bar{R}_{C_x(S_x)} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\text{sen}\alpha \\ 0 & \text{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad \bar{R}_{C_y(S_y)} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \text{sen}\alpha \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ -\text{sen}\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad (7)$$

$$\bar{R}_{C_z(S_z)} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\alpha & 0 \\ \text{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & \text{sen}\alpha & \pm 1 \end{pmatrix},$$

respectivamente, os  $C_x$ ,  $C_y$  e  $C_z$  de  $\bar{\mathbf{R}}$  correspondem a rotações próprias (puras) com o sinal + nas unidades das matrizes. E  $S_x$ ,  $S_y$  e  $S_z$  são rotações impróprias (rotações seguidas por reflexões no plano perpendicular ao eixo das rotações) com o sinal – nas unidades das matrizes. O sinal do ângulo  $\alpha$  de ser invertido para uma rotação negativa.

Existem dois pontos de vista sobre a operação de rotação, ou seja, passiva e ativa [16]. No ponto de vista passiva, um dado vetor de interesse (ou tensor, ou uma estrutura física) é fixado e o sistema de coordenadas é rotacionado. No ativo, o sistema de coordenadas é fixado e um dado vetor é rotacionado.

As representações matriciais tridimensionais para reflexões nos planos  $x = 0$ ,  $y = 0$  e  $z = 0$  são dadas respectivamente por:

$$\bar{\mathbf{R}}_{\sigma_x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{R}}_{\sigma_y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{R}}_{\sigma_z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

e a matriz que representa a inversão  $i$  (centro de simetria) é:

$$\bar{\mathbf{R}}_i = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (9)$$



O determinante de  $\bar{\mathbf{R}}$  para rotações puras é +1, mas para rotações impróprias, reflexões e inversões é igual a -1. Qualquer vetor  $\mathbf{V}$  é transformado por  $\bar{\mathbf{R}}$  em outro vetor  $\mathbf{V}'$  de acordo com a relação  $\mathbf{V}' = \bar{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{V}$ . Observe que esta relação é diferente da que é usada para a transformação de vetores de base [17].

### 3.7 - Princípio de Curie de superposição de simetria.

As estruturas de guias de onda devem conter um material interno ao guia. Este material deve ter uma dada simetria, e seus arranjos e sua distribuição espacial deve também ser descrita por grupo de simetria. Perturbações externas devem ser de diferentes naturezas (por exemplo, campos elétricos e magnéticos, forças mecânicas, campos de temperatura e suas combinações) e de diferentes simetrias. Neste caso, o problema de determinação do grupo de simetria da estrutura do guia de onda é resolvido com base no conhecimento do princípio de Curie. Na linguagem matemática, o princípio de Curie pode ser escrito como a interseção dos grupos de simetria de todos os elementos constitutivos de uma dada estrutura do guia de onda: A geometria da estrutura com um todo, o material interno, as perturbações externas:

$$G_{res} = G_1 \cap G_2 \cap G_3 \dots \quad (10)$$

A relação (10) expressa o princípio de superposição de simetrias. Ou seja, a simetria de um objeto complexo é definida pelo maior subgrupo comum dos grupos  $G_1$ ,  $G_2$  e  $G_3 \dots$ , que descreve os constituintes do objeto.

## CAPÍTULO 4

### GUIAS DE ONDAS COM MAGNETIZAÇÃO

#### 4.1 – Grupos magnéticos aplicados em guias de ondas.

Estruturas de guias de onda têm muitas aplicações em dispositivos de microondas e óticos. Eles são acopladores direcionais, conversores de modo, circuladores, filtros e outros [1].

As propriedades da estrutura do guia de onda e sua simetria podem ser analisados em termos da matriz de espalhamento. Vale frisar que o importante na análise é a simetria da estrutura, isto é, a simetria do guia de onda referido [1].

O mais alto grupo de simetria tridimensional que descreve estruturas de guia de onda sem magnetização é  $D_{2h}$ . Este grupo contém os seguintes elementos de simetria:

- $e$  é o elemento unidade.
- $i$  é o centro de simetria
- $C_{2x}$ ,  $C_{2y}$  e  $C_{2z}$  são rotações por  $\pi$  sobre os eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente.
- $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\sigma_z$  são reflexões nos planos  $x = 0$ ,  $y = 0$  e  $z = 0$ , respectivamente.

Os grupos magnéticos de segunda categoria são  $D_{2h}$ ,  $D_2$ ,  $C_{2h}$ ,  $C_{2v}$ ,  $C_i$ ,  $C_2$ ,  $C_s$ ,  $C_1$ . Os possíveis grupos magnéticos de terceira categoria das estruturas estudadas são  $D_{2h}(D_2)$ ,  $D_{2h}(C_{2h})$ ,  $D_{2h}(C_{2v})$ ,  $D_2(C_2)$ ,  $C_{2h}(C_i)$ ,  $C_{2h}(C_2)$ ,  $C_{2h}(C_2)$ ,  $C_{2h}(C_s)$ ,  $C_{2v}(C_2)$ ,  $C_{2v}(C_s)$ ,  $C_i(C_1)$ ,  $C_2(C_1)$  e  $C_s(C_1)$ . Adiante, será mostrado como se calcular as matrizes de espalhamento para as simetrias de guias de onda estudadas neste trabalho.

O grupo de simetria de uma dada estrutura de guia de onda é definido pela simetria de seus constituintes: preenchimento do guia de onda (material interno), geometria do guia de onda, campo magnético, arranjo geométrico da estrutura toda. Além disso, a simetria resultante que governa as propriedades da estrutura do guia de onda pode ser determinada pelo princípio de superposição de simetria de Curie descrito anteriormente.

Para estruturas de guias de onda com magnetização azimutal, objeto de estudo principal deste trabalho, usou-se a teoria de grupos magnéticos. Definiu-se a estrutura de matrizes de espalhamento 4x4 para os casos de guias de onda quadrado, retangular e circular, preenchidos com ferrite.

Aplicou-se a teoria de grupos magnéticos em guias de ondas preenchidos com ferrite ou material semicondutor, de modo que se um campo magnético gerado a partir de uma corrente aplicada em um fio condutor ao longo do eixo do guia de onda [fig. 4(a)]. Tais

estruturas são usadas em tecnologia de microondas, isoladores, *phase shifter* não recíproco, *cut-off switches* [2].

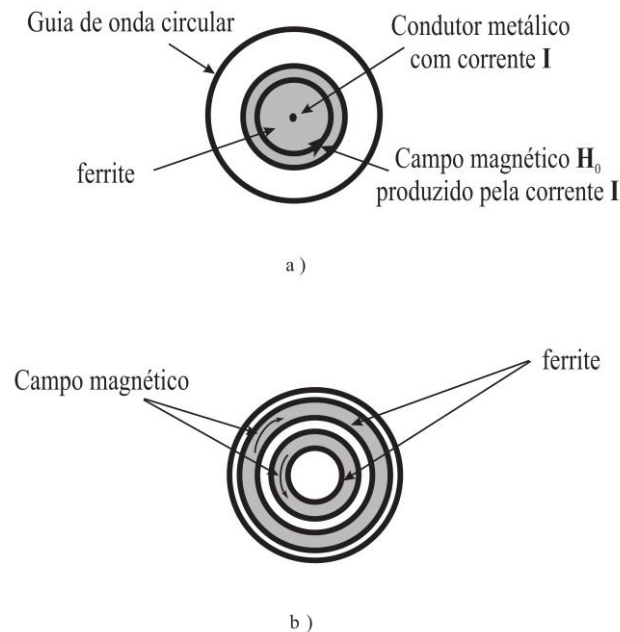


Figura 4. Seção transversal de guias de onda circular com magnetização azimutal.  $H_0$  é o campo magnético. a) Guia de onda com uma camada de ferrite, b) guia de onda com opostas magnetizações e com dupla camada de ferrite.

A complexidade da análise destes guias de ondas se origina pela natureza do tensor da ferrite e por um grande número de parâmetros geométricos e físicos. Na teoria destas estruturas de guia de ondas, vários métodos de aproximações têm sido utilizados. Dentre estes: método variacional [6] e de perturbações [7], representação de rede transversal [5], e também algumas técnicas numéricas, tais como método FDFD [8].

Soluções analíticas exatas das equações diferenciais são conhecidas para alguns casos especiais, por exemplo, para os casos dos modos  $TE_{0n}$  com aproximações da magnetização uniforme da ferrite. Estas soluções são escritas em termos de funções hipergeométricas confluentes [3].

No entanto, em casos de um meio homogêneo de ferrite e magnetização por uma corrente em um condutor sobre o eixo central do guia de onda tem uma dependência radial. Isto é, a magnetização é não uniforme. Portanto, os parâmetros do tensor permeabilidade dependem da coordenada radial. Para este caso, as soluções analíticas são conhecidas. Uma outra complicação aparece em casos de estruturas com várias camadas [fig. 4(b)].

A fim de validar soluções analíticas e numéricas aproximadas é necessária uma referência exata como critério de conservação de energia. Para esta finalidade, a análise de

simetria [1] [18], pode ser usada. Uma análise da matriz de espalhamento em estruturas de guias de onda usando a teoria de grupos magnéticos não tem sido publicada na literatura. Porém, é de extrema importância. Tal análise pode ser muito útil em investigações teóricas e em projetos práticos de dispositivos baseados nestes guias de onda.

Consideramos estruturas de guia de ondas e seus constituintes, tais como meio físico, geometria das estruturas, campos externos e perturbações, do ponto de vista da simetria. Discutiremos a descrição teórica de grupos de objetos que são conhecidas na prática. Estes objetos diferem pela natureza física em questão. O que os une é a simetria do problema [1].

Muitas estruturas de guia de ondas podem ser descritas por grupos pontuais magnéticos [1]. Estes grupos consistem de rotações geométricas, reflexões, operador de inversão temporal, e algumas vezes de uma combinação de operações geométricas com operador de inversão temporal. As operações geométricas do grupo pontual deixam pelo menos um ponto do objeto inalterado [1]. Assim, estruturas periódicas, onde as operações de translação que alteram todos os pontos do objeto estão além do escopo deste trabalho.

#### 4.2 - Simetria de meio eletromagnético, guia de ondas e fontes.

O meio linear é descrito pelo grupo pontual de simetria  $K_h$ . Grupos contínuos  $K_h$  definem a mais alta possível simetria esférica. Para meios homogêneos, qualquer ponto do espaço deve possuir a simetria  $K_h$ . Pode-se considerar tal meio com um guia de onda especial com onda plana polarizada linearmente. Uma secção transversal deste guia de onda, isto é, um plano normal ao vetor de onda, tem a simetria  $C_{\infty v}$ . Propriedades eletromagnéticas deste meio não dependem da direção.

Um meio quiral homogêneo possui uma simetria inferior que é descrita pelo grupo pontual  $K$ . Qualquer secção transversal deste meio tem simetria  $C_{\infty}$ .

O meio destes dois exemplos citados tem propriedades simples devido sua simetria esférica. Estas simetrias correspondem à simetria de escalares (pseudo escalares), e os parâmetros constitutivos do meio são escalares (pseudo escalares).

Um meio uniaxial com um eixo principal de ordem infinita  $C_{\infty}$  pode ser de diferentes tipos. Um meio que é formado por um cilindro orientado ao longo de um eixo tem simetria  $D_{\infty h}$ . Um meio formado por cones orientados ao longo de um eixo apresenta simetria  $C_{\infty v}$ . O

meio uniaxial é descrito por tensores constitutivos e as propriedades eletromagnéticas deles dependem da direção.

Meios anisotrópicos são descritos por simetria de grupos discretos inferiores tem usualmente um maior número de parâmetros independentes e propriedades eletromagnéticas mais complexas.

Examinou-se simetrias de algumas estruturas de guias de onda. Para simplificar, assumiremos que estes estão preenchidos com um meio isotrópico, tal que a simetria do guia de onda é fornecida apenas pela sua geometria. Uma secção transversal de um guia de onda circular, isto é, uma figura plana é descrita pelo grupo  $C_{\infty v}$ , já uma secção tridimensional de um guia de onda circular tem simetria  $D_{\infty h}$ , e um guia de onda planar tem simetria  $C_{2v}$ . Sendo que dois guias de onda acoplados strip têm apenas um plano de simetria  $C_s$  de sua seção transversal e a estrutura tridimensional apresenta simetria  $C_{2v}$ .

Alguns exemplos de estruturas de guias de onda preenchidos com ferrite magnetizados são apresentados na figura 5. O primeiro é um guia de onda circular preenchido com ferrite e magnetizado ao longo do eixo [fig. 5(a)]. A simetria magnética da seção transversal deste guia é o grupo magnético de terceira categoria  $C_{\infty v}(C_{\infty})$  e de uma seção do guia é  $D_{\infty h}(C_{\infty h})$ . Um guia de onda planar preenchido com ferrite com magnetização longitudinal [fig. 5(b)]. A simetria de sua seção transversal é  $C_{2v}(C_2)$  e a simetria de sua seção é  $D_{2h}(C_{2h})$ . A simetria de seção transversal de um guia de onda com plasma magnetizado e de sua seção estão presentes na [fig. 5(c)], são  $C_s$  de segunda categoria e  $C_{2v}(C_s)$  de terceira categoria, respectivamente.

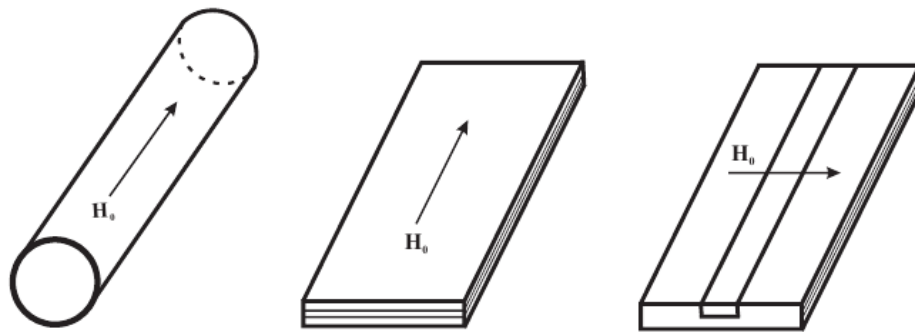


Figura 5. Simetria de estruturas de guias de onda: Guia de onda circular preenchido com ferrite (a); Guia de onda planar acoplado preenchido com ferrite (b); Guia de onda strip com plasma magnetizado (c).  $H_0$  é o campo magnético aplicado na estrutura.

Fontes eletromagnéticas podem também ser descritas em termos de grupos magnéticos. O dipolo elétrico, por exemplo, tem a simetria  $C_{\infty v}$ . O dipolo magnético é

descrito pelo grupo  $D_{\infty h}(C_{\infty h})$ . A simetria de muitos objetos complexos tais como distribuições de carga e corrente, etc., pode ser descrita usando o princípio de Currie.

#### 4.3 – Seções transversais de guias de ondas e teoria de grupos.

##### 4.3.1 – Guia de onda quadrado.

A seção transversal do guia de onda com um meio não magnetizado [fig. 6(a)] tem simetria  $C_{4v}$ . As representações irredutíveis deste grupo são dadas pela tabela 11 a seguir [1]:

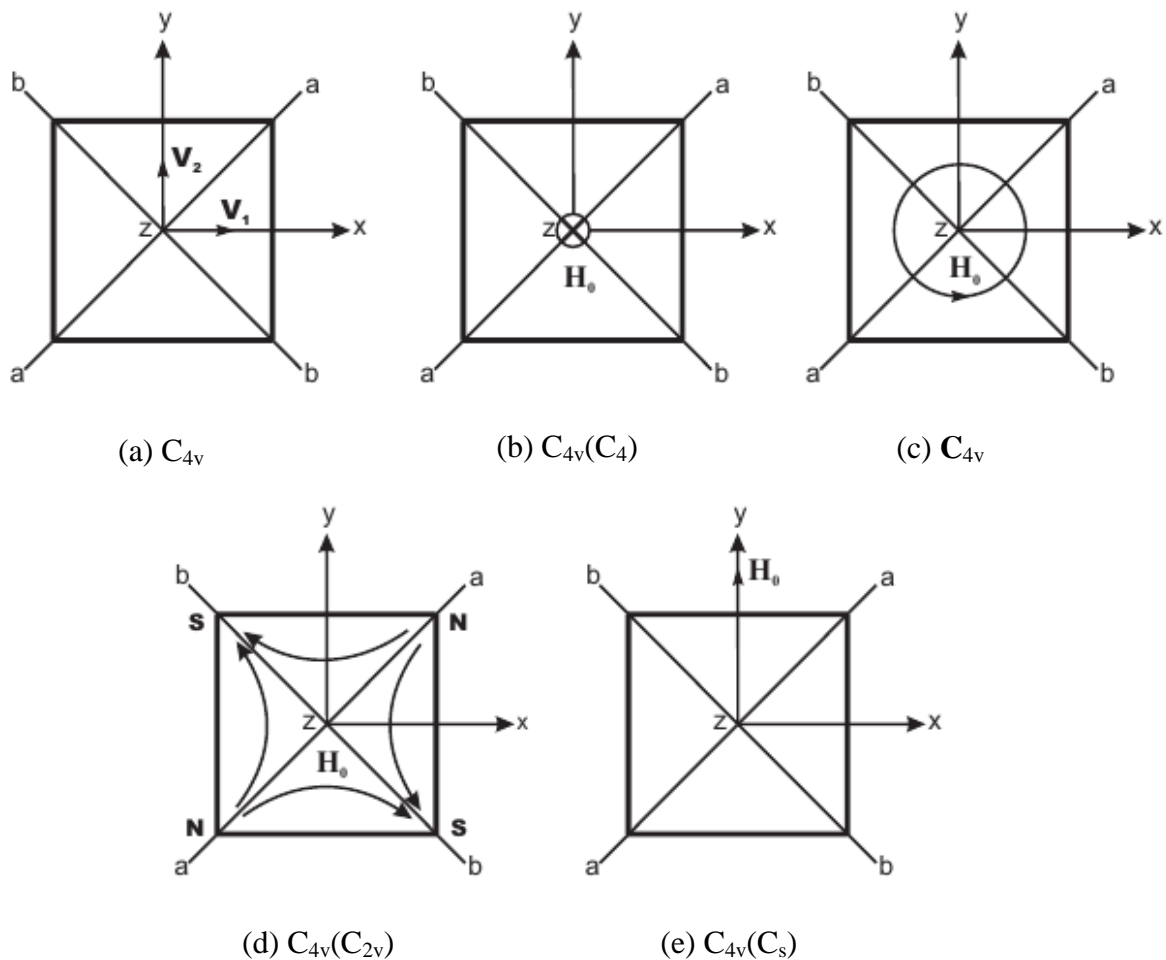
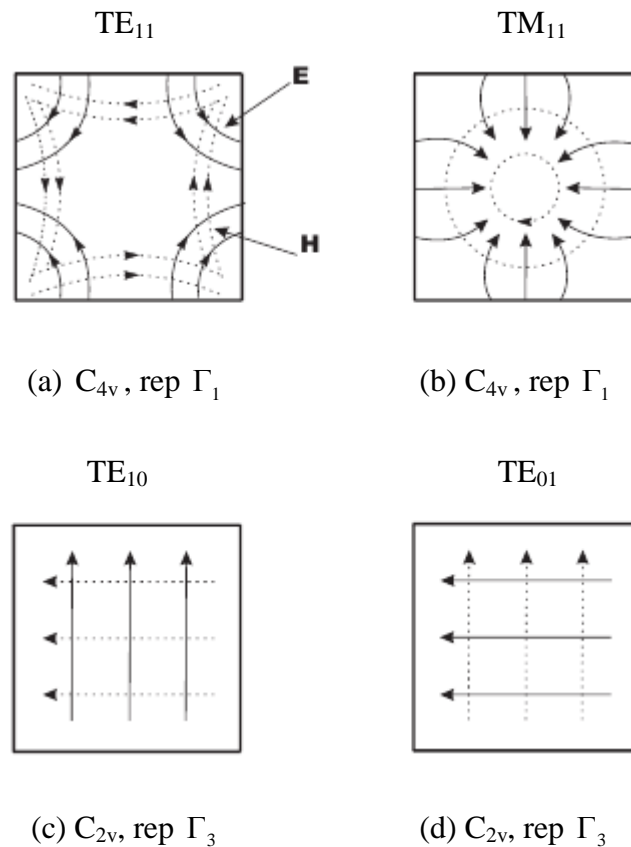


Figura 6. Seção transversal do guia de onda quadrado (a); Guia de onda preenchido com ferrite com magnetização longitudinal (b); Com magnetização circular (c); Com campo magnético quadrupolo (d); Com magnetização transversal (e);  $\mathbf{H}_0$  é o campo magnético.

Tabela 11. Tabela de caracteres de representações irreduzíveis do grupo  $C_{4v}$ .

$C_{4v}$	$e$	$C_2$	$C_4$	$C_4^{-1}$	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\sigma_{d1}$	$\sigma_{d2}$
$\Gamma_1$	1	1	1	1	1	1	1	1
$\Gamma_2$	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
$\Gamma_3$	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
$\Gamma_4$	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
$\Gamma_5$	2	-2	0	0	0	0	0	0

Na figura 7 são apresentados configurações de campo eletromagnético em guias de onda quadrado. Cada configuração de modo está relacionada a respectivas representações irreduzíveis do grupo que forma a simetria do guia de onda. Neste caso, temos o grupo  $C_{4v}$ , evidenciado pela tabela 11. O campo elétrico  $\mathbf{E}$  está caracterizado pelas linhas sólidas, e o campo magnético  $\mathbf{H}$  pelas linhas pontilhadas.

Figura 7. Modo  $TE_{11}$  (a); Modo  $TM_{11}$  (b); Modo  $TE_{10}$  (c); Modo  $TE_{01}$  (d).

Em seguida, apresentamos as tabelas de corepresentações irreduzíveis para os casos de guia de onda quadrado preenchido com ferrite e com magnetização azimutal [fig. 6(b), Tabela

12]; Com magnetização circular [fig. 6(c), Tabela 13]; com quadrupolo do campo magnético [fig. 6(d), Tabela 14], e com magnetização transversal [fig. 6(e), Tabela 15], respectivamente.

Tabela 12. Tabela de caracteres de corepresentações irreduzíveis do grupo  $C_{4v}(C_4)$  [1].

$C_{4v}(C_4)$	$e$	$C_2$	$C_4$	$C_4^{-1}$	$T\sigma_x$	$T\sigma_y$	$T\sigma_{d_1}$	$T\sigma_{d_2}$
$D(\Gamma_1)$	1	1	1	1	1	1	1	1
$D(\Gamma_2)$	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
$D(\Gamma_3)$	1	-1	i	-i	1	-1	i	-i
$D(\Gamma_4)$	1	-1	-i	i	1	-1	-i	i

Tabela 13. Tabela de caracteres de corepresentações irreduzíveis do grupo  $C_{4v}$  [1].

$C_{4v}$	$e$	$C_2$	$C_4$	$C_4^{-1}$	$T\sigma_x$	$T\sigma_y$	$T\sigma_{d_1}$	$T\sigma_{d_2}$
$D(\Gamma_1)$	1	1	1	1	1	1	1	1
$D(\Gamma_2)$	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
$D(\Gamma_3)$	1	-1	i	-i	1	-1	-i	i
$D(\Gamma_4)$	1	-1	-i	i	1	-1	i	-i

Tabela 14. Tabela de corepresentações irreduzíveis do grupo magnético  $C_{4v}(C_{2v})$  [1].

$C_{4v}(C_{2v})$	$e$	$C_2$	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$TC_4$	$TC_4^{-1}$	$T\sigma_{d_1}$	$T\sigma_{d_2}$
$D(\Gamma_1)$	1	1	1	1	1	1	1	1
$D(\Gamma_2)$	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
$D(\Gamma_3)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Tabela 15. Tabela de caracteres de corepresentações irreduzíveis do grupo magnético  $C_{4v}(C_s)$  [1]

$C_{4v}(C_s)$	$e$	$\sigma_x$	$T\sigma_y$	$TC_2$
$D(\Gamma_1)$	1	1	1	1
$D(\Gamma_2)$	1	-1	1	-1

Neste trabalho, tem-se o interesse nos modos dominantes  $TE_{10}$  e  $TE_{01}$  [fig. 7(c) e (d)]. Os campos elétricos deles têm máximo no plano  $x = 0$  e  $y = 0$ , respectivamente. A fim de discutir as propriedades de transformações de simetria dos campos eletromagnéticos,



podemos usar o espaço funcional com as autofunções descrevendo estes campos. Mas por razões de simplicidade, iremos considerar o espaço vetorial correspondente [1]. Os modos  $TE_{10}$  e  $TE_{01}$  são representados por vetores unitários  $\mathbf{V}_2$  e  $\mathbf{V}_1$ , respectivamente [fig. 6(a)]. O vetor  $\mathbf{V}_1$  pertence à linha  $(\Gamma_5)_{11}$  da representação bidimensional  $\Gamma_5$ , o vetor  $\mathbf{V}_2$  pertence à linha  $(\Gamma_5)_{22}$ . Em guias de ondas magnetizados, a estrutura dos campos eletromagnéticos será diferente dos modos  $TE_{10}$  e  $TE_{01}$ . Contudo, nesta pesquisa as propriedades das transformações dos campos foram considerados mais importantes e não suas estruturas.

No espaço bidimensional  $x0y$  [fig. 6(a)], os vetores  $\mathbf{V}_1$  e  $\mathbf{V}_2$  podem ser escritos da seguinte forma:

$$\mathbf{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

Esses dois modos  $TE_{10}$  e  $TE_{01}$  são degenerados, pois pertencem a mesma representação irreduzível. Sob transformações de simetria, eles transformam-se em outro ou em si mesmo. Por exemplo, o operador  $C_4$  aplicado a  $\mathbf{V}_1$  e  $\mathbf{V}_2$  fornece:

$$C_4(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2) = (\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (\mathbf{V}_2, -\mathbf{V}_1), \quad (12)$$

Isto é, o vetor de base  $\mathbf{V}_1$  é transformado em  $\mathbf{V}_2$  e  $\mathbf{V}_2$  é transformado em  $-\mathbf{V}_1$ .

#### 4.3.2 – Guia de onda Retangular.

A seção transversal do guia de onda retangular com um meio não magnetizado [fig. 8(a)] tem simetria  $C_{2v}$ . As representações irreduzíveis deste grupo são dadas pela tabela 16 [1]:

A seguir são mostradas seções transversais de guias de onda retangular com diferentes tipos de magnetizações. Diferentes tipos de grupos magnéticos são correlacionados para cada tipo de magnetização.

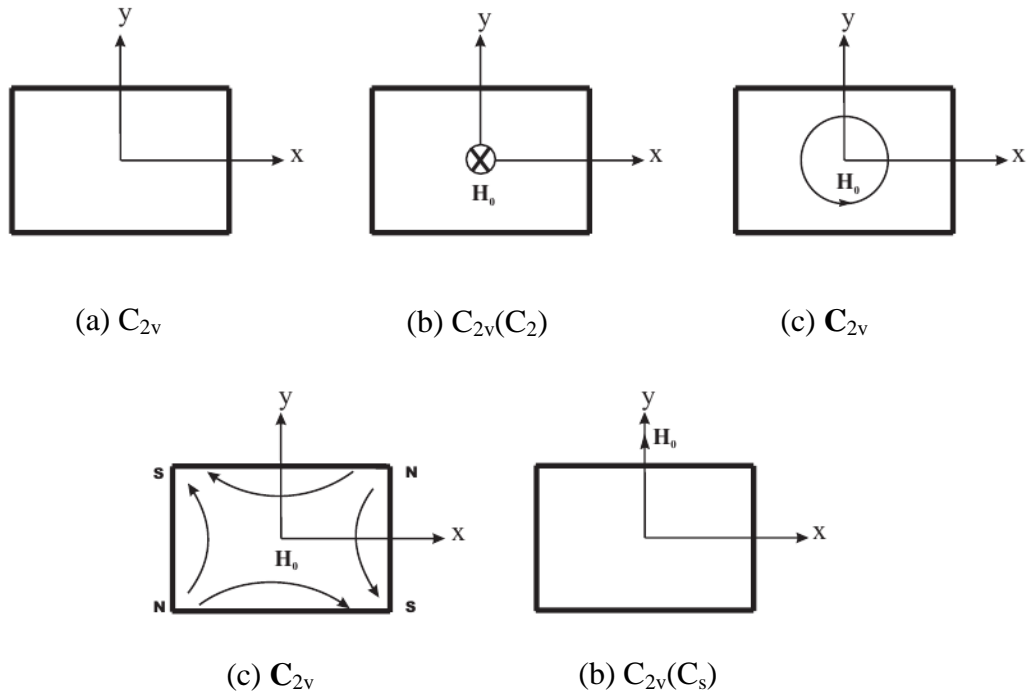


Figura 8. Seção transversal do guia de onda retangular (a); Guia de onda preenchido com ferrite com magnetização longitudinal (b); Com magnetização circular (c); Com campo magnético quadrupolo (d); Com magnetização transversal (e);  $\mathbf{H}_0$  é o campo magnético.

Tabela 16. Tabela de caracteres de representações irreduzíveis do grupo  $C_{2v}$  [1].

$C_{2v}$	$e$	$C_2$	$\sigma_x$	$\sigma_y$
$\Gamma_1$	1	1	1	1
$\Gamma_2$	1	1	-1	-1
$\Gamma_3$	1	-1	-1	-1
$\Gamma_4$	1	-1	-1	1

A seguir são apresentados configurações de campo eletromagnético em guias de onda retangulares. As configurações de modo estão relacionadas às respectivas representações irreduzíveis do grupo que forma a simetria do guia de onda retangular. Neste caso, temos o grupo  $C_{2v}$ , que é um grupo magnético que apresenta operador de inversão temporal aplicado a cada elemento de simetria do grupo, e que existem métodos analíticos para calcular corepresentações [20], evidenciados na tabela 19. O campo elétrico  $\mathbf{E}$  está caracterizado pelas linhas sólidas e o campo magnético  $\mathbf{H}$  pelas linhas pontilhadas.

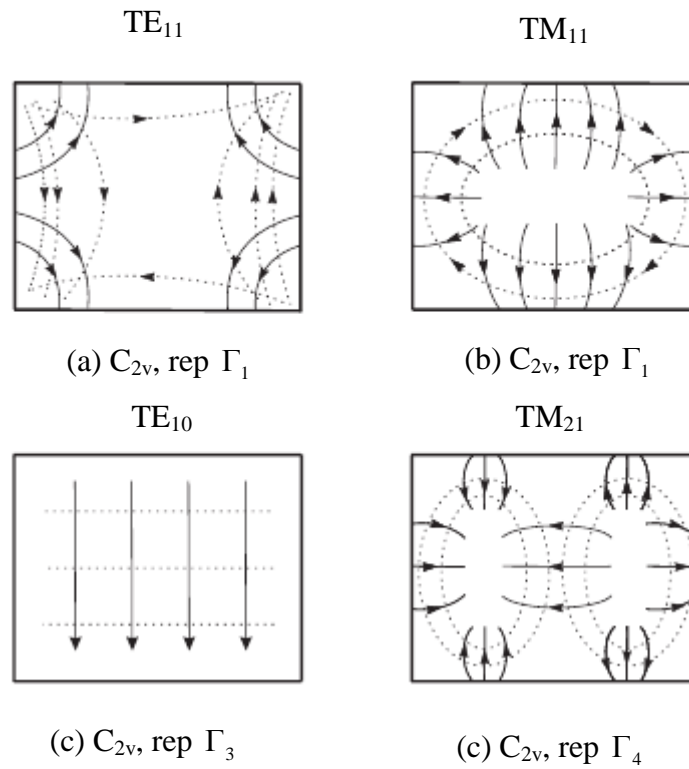


Figura 9. Modo  $TE_{11}$  (a); Modo  $TM_{11}$  (b); Modo  $TE_{10}$  (c); Modo  $TE_{21}$  (d).

Em seguida, apresentamos as tabelas de representações irreduzíveis para os casos de guia de onda retangular preenchido com ferrite e com magnetização azimutal [fig. 8(b), Tabela 17]; Com magnetização circular [fig. 8(c), Tabela 19]; com quadrupolo do campo magnético [fig. 8(d), Tabela 19], e com magnetização transversal [fig. 8(e), Tabela 18], respectivamente.

Tabela 17. Tabela de caracteres de corepresentações irreduzíveis do grupo magnético  $C_{2v}(C_2)$

$C_{2v}(C_2)$	$e$	$C_2$	$T\sigma_x$	$T\sigma_y$
$D(\Gamma_1)$	1	1	1	1
$D(\Gamma_2)$	1	-1	1	-1

Tabela 18. Tabela de caracteres de corepresentações irreduzíveis do grupo magnético  $C_{2v}(C_s)$  [1].

$C_{2v}(C_s)$	$e$	$\sigma_x$	$T\sigma_y$	$TC_2$
$D(\Gamma_1)$	1	1	1	1
$D(\Gamma_2)$	1	-1	1	-1

Tabela 19. Tabela de caracteres de corepresentações irreduzíveis do grupo magnético  $C_{2v}$ .

$C_{2v}$	$e$	$C_2$	$\sigma_x$	$\sigma_y$
$D(\Gamma_1)$	1	1	1	1
$D(\Gamma_2)$	1	1	1	1
$D(\Gamma_3)$	1	-1	-1	-1
$D(\Gamma_4)$	1	-1	1	-1

## 4.3.3 – Guia de onda Circular.

A seção transversal do guia de onda circular com um meio não magnetizado [fig. 10(a)] tem simetria  $C_{\infty v}$ . Analogamente como feito para guias de onda quadrado e retangular, também é realizado para guia circular. Ou seja, a simetria deste é caracterizado pelo grupo  $D_{\infty h}(C_{\infty v})$ , sendo o grupo  $C_{\infty v}$  um subgrupo de  $D_{\infty h}$ . As diferentes magnetizações estão representadas a seguir [fig. 10]:

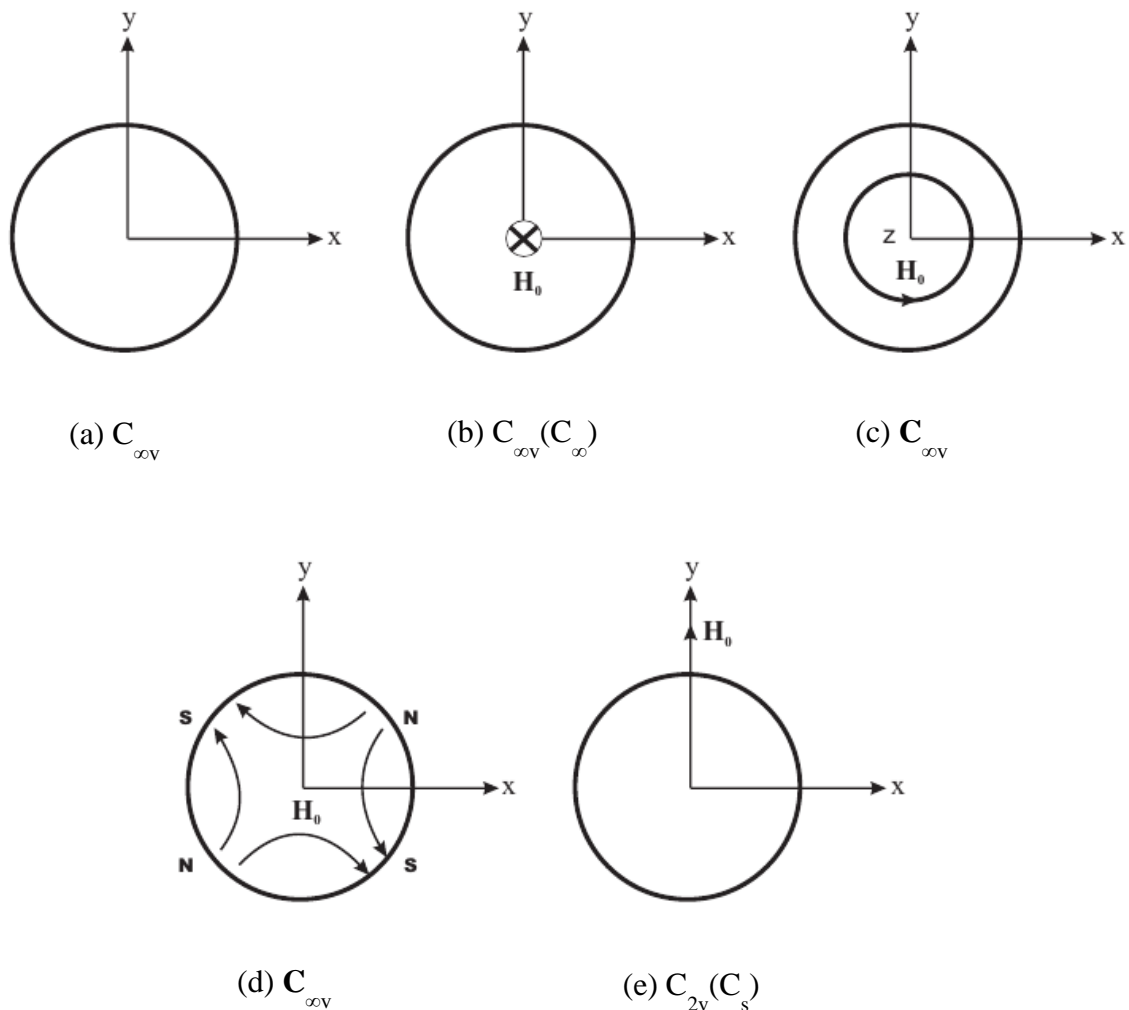


Figura 10. Seção transversal do guia de onda circular (a); Guia de onda preenchido com ferrite com magnetização longitudinal (b); Com magnetização circular (c); Com quadrupolo do campo magnético (d); Com magnetização transversal (e);  $\mathbf{H}_0$  é o campo magnético.

a) Matriz de espalhamento em seções de guia de onda.

A matriz de espalhamento foi utilizada como ferramenta para análise do sinal transmitido e refletido em relação ao sinal incidente para os guias de onda com geometria quadrada e retangular.

Foi demonstrado que os campos em guias de onda com simetria angular podem ser decompostos em autos modos TM ( $E_r, H_\theta, E_z$ ) e TE ( $H_r, E_\theta, H_z$ ) [3]. Propagação de modos TM ao longo do guia de onda não difere da propagação em guia de ondas preenchido com dielétrico isotrópico [4]. Desta forma, neste estudo serão considerados apenas modos TE. Para estes modos, a propagação dos mesmos ao longo do guia de onda é não recíproco e depende dos parâmetros da ferrite. Foi considerada uma seção do guia de onda com quatro portas enumeradas, como mostra a figura 11. Cada porta corresponde a componente  $\mathbf{H}^r$  de qualquer modo  $TE_{0n}$ . A onda incidente  $\mathbf{H}^i = (H_1^i, H_2^i, H_3^i, H_4^i)^t$  e a refletida  $\mathbf{H}^r = (H_1^r, H_2^r, H_3^r, H_4^r)^t$  podem ser escritas em relação a matriz de espalhamento  $\bar{\mathbf{S}}$  na forma  $\mathbf{H}^r = \bar{\mathbf{S}}\mathbf{H}^i$ .

Observe que a descrição do guia de onda pode ser feita em termos das componentes elétricas do campo:  $\mathbf{E}^r = \bar{\mathbf{S}}\mathbf{E}^i$ . Pode ser mostrado que as estruturas calculadas de matrizes de espalhamento podem ser obtidas por meio de método de grupo teórico.

#### 4.4 – Análise de guias de ondas circular e quadrado

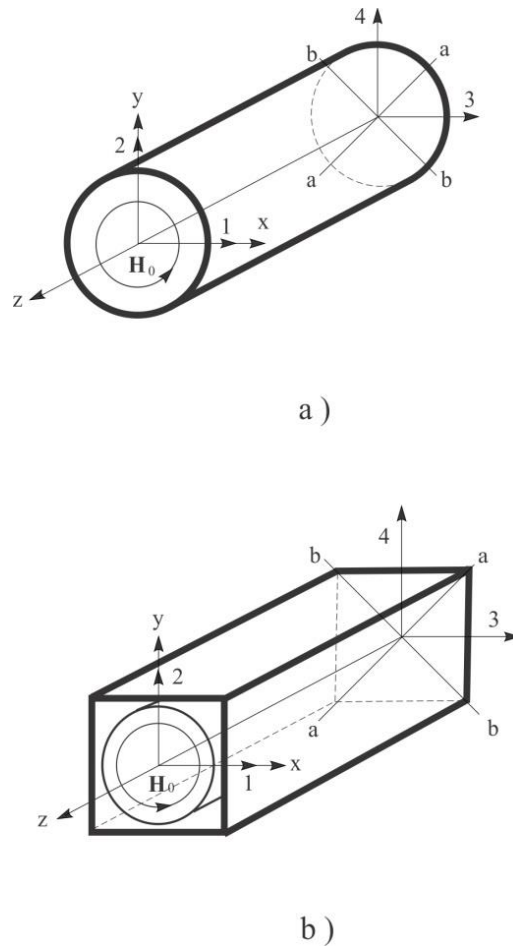


Figura 11. a) Seção de guias de onda circular, grupo magnético é  $D_{\infty h}(C_{\infty v})$ . b) Seção de guia de onda quadrado, grupo magnético  $D_{4h}(C_{4v})$ .  $H_0$  é o campo magnético.

A seguir, calculamos a estrutura da matriz de espalhamento  $\bar{S}$  utilizando teoria de grupos magnéticos.

b) Descrição de simetria de guias de onda usando grupos magnéticos.

O grupo magnético do cilindro magnetizado na figura 11(a) é  $D_{\infty h}(C_{\infty v})$ . O grupo magnético da seção do guia de onda quadrado na figura 11(b) é  $D_{4h}(C_{4v})$ , que é subgrupo de  $D_{\infty h}(C_{\infty v})$ . As quatro portas em ambos os casos da figura 11 podem ser analisadas usando o grupo  $D_{4h}(C_{4v})$ , devido a mesma forma de magnetização em ambos. Este grupo consiste de 8 elementos e 8 anti-elementos [1]:

- $e$  elemento unidade
- $C_{2z}$  rotação por  $\pi$  sobre o eixo  $z$
- $C_{4z}$  e  $C_{4z}^{-1}$  são rotações sobre o eixo  $z$  pelos ângulos  $\frac{\pi}{2}$  e  $-\frac{\pi}{2}$ , respectivamente.
- $TS_{4z}$  e  $TS_{4z}^{-1}$  são antirotações impróprias sobre o eixo  $z$  por ângulos  $\frac{\pi}{2}$  e  $-\frac{\pi}{2}$ , respectivamente.

- $\sigma_x$  e  $\sigma_y$  são reflexões nos planos passando através do eixo z, y e x do guia de onda, respectivamente.
- $\sigma_{(a-a)}$  e  $\sigma_{(b-b)}$  são reflexões nos planos passando através do eixo z do guia de onda, e pelos eixos (a-a) e (b-b), respectivamente.
- $T\sigma_z$  é antireflexão no plano  $z = 0$ .
- $Ti$  é o anticentro.

c) Representação matricial de elementos de simetria.

Para a análise a seguir, serão usados os geradores [1] do grupo  $D_{4h}(C_{4v})$  e suas representações matriciais. Um dos possíveis conjuntos de geradores são os elementos  $C_{4z}$ ,  $\sigma_x$  e  $T\sigma_z$ . As representações das matrizes 4x4 destes elementos de simetria podem ser escritas analisando a figura 11. Por exemplo, o operador correspondente à rotação da estrutura sobre o eixo z por  $\frac{\pi}{2}$  a seguir. O campo na porta 2 após esta rotação é substituído pelo campo na porta 1. Isto significa que o elemento  $R_{12}$  da matriz  $\bar{R}_{C_{4z}}$  deve ser igual a 1. Todos os outros elementos sobre a linha 1 e coluna 2 da matriz são zero. Essa rotação leva também à mudança do campo na porta 1 por um campo da porta 2 com sinal oposto, então  $R_{21} = -1$ , etc. Como resultado, a representação matricial de  $\bar{R}_{C_{4z}}$ ,  $\bar{R}_{\sigma_x}$  e  $\bar{R}_{\sigma_z}$  dos elementos  $C_{4v}$ ,  $\sigma_x$  e  $\sigma_z$  é:

$$\bar{R}_{C_{4z}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$\bar{R}_{\sigma_x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$\bar{R}_{\sigma_z} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (15)$$

Observe que ao se escrever os operadores de reflexão  $\bar{R}_{\sigma_x}$  e  $\bar{R}_{\sigma_z}$  nas expressões acima, toma-se em consideração a natureza axial do campo magnético.

d) Cálculo da matriz de espalhamento e sua análise.

Agora, realiza-se o cálculo a matriz de espalhamento  $\bar{S}$ , usando as seguintes relações de comutação para a mesma e escolhendo as operações de simetria [8]:

$$\bar{\mathbf{R}}_{C_{az}} \cdot \bar{\mathbf{S}} = \bar{\mathbf{S}} \cdot \bar{\mathbf{R}}_{C_{az}}, \quad (16)$$

$$\bar{\mathbf{R}}_{\sigma_x} \cdot \bar{\mathbf{S}} = \bar{\mathbf{S}} \cdot \bar{\mathbf{R}}_{\sigma_x}, \quad (17)$$

$$\bar{\mathbf{R}}_{\sigma_z} \cdot \bar{\mathbf{S}} = \bar{\mathbf{S}}^t \cdot \bar{\mathbf{R}}_{\sigma_z}. \quad (18)$$

Observe que no lado direito da relação (18), a matriz  $\bar{\mathbf{S}}$  é transposta e esta é a consequência da presença do operador de inversão temporal  $\mathbf{T}$  na correspondência do elemento de simetria  $T\sigma_z$ .

Assim, obteve-se a matriz de espalhamento desejada na seguinte forma:

$$\bar{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_{11} & S_{12} \\ 0 & 0 & S_{21} & S_{11} \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Esta matriz tem 3 parâmetros complexos independentes. 8 elementos da matriz são zero por restrições de simetria:  $S_{13} = S_{14} = S_{23} = S_{24} = S_{31} = S_{32} = S_{41} = S_{42} = 0$ . Então as portas 1 e 3, portas 1 e 4, portas 2 e 3, e portas 3 e 4, são desacopladas uma das outras. Observe que a desigualdade  $\bar{\mathbf{S}} \neq \bar{\mathbf{S}}^t$  (t denota transposto) significa que a quarta porta é não recíproca.

Os valores numéricos dos elementos não zeros  $S_{mn}$  dependem dos parâmetros do guia de onda e seu comprimento. Com  $S_{21} = S_{12}$  tem-se a matriz de espalhamento com apenas 2 parâmetros complexos. Esta matriz descreve o guia de onda com meio isotrópico não magnético.

Analisando a matriz (19) por blocos, temos duas matrizes 2x2,  $\bar{\mathbf{S}}_1 = \bar{\mathbf{S}}_2$ , com autovalores e autovetores iguais a:

$$\lambda_{1,2} = S_{11} \pm \sqrt{S_{12}S_{21}}, \quad (20)$$

$$\lambda_{3,4} = S_{11} \pm \sqrt{S_{12}S_{21}}. \quad (21)$$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{S_{12}}{\sqrt{S_{12}S_{21}}} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (22)$$

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{S_{12}}{\sqrt{S_{12}S_{21}}} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (23)$$



Desta forma, podemos rescrever a matriz (19) para dois casos particulares, usando as condições unitárias [1]:

$$\bar{\mathbf{S}} = (\bar{\mathbf{S}}^*)^t = \bar{\mathbf{I}}_4 = (\bar{\mathbf{S}}^*)^t \cdot \bar{\mathbf{S}} \quad (24)$$

onde  $\bar{\mathbf{I}}_4$  é a matriz identidade. A matriz de espalhamento  $\bar{\mathbf{S}}$  para as quatro portas sem perdas é dada por:

$$\bar{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} |S_{11}|e^{j\phi_{11}} & |S_{12}|e^{j\phi_{12}} & 0 & 0 \\ |S_{12}|e^{j\phi_{21}} & |S_{11}|e^{j\phi_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & |S_{11}|e^{j\phi_{11}} & |S_{12}|e^{j\phi_{12}} \\ 0 & 0 & |S_{12}|e^{j\phi_{21}} & |S_{11}|e^{j\phi_{11}} \end{pmatrix}, \quad (25)$$

onde  $\phi_{mn}$  são as fases dos elementos  $S_{mn}$  e  $S_{11} = |S_{11}|e^{j\phi_{11}}$ ,  $S_{12} = |S_{12}|e^{j\phi_{12}}$ ,  $S_{21} = |S_{12}|e^{j\phi_{21}}$ .

Observe que devido à condição unitária temos  $|S_{12}| = |S_{21}|$ . A matriz (25) é definida por cinco parâmetros:  $|S_{11}|$ ,  $|S_{12}|$ ,  $\phi_{11}$ ,  $\phi_{12}$  e  $\phi_{21}$ .

Se  $S_{11} = 0$ , tem-se a matriz de espalhamento para uma seção do guia de onda infinita ou para uma seção do guia de onda idealmente finita:

$$\bar{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} e^{j\phi_{11}} & e^{j\phi_{12}} & 0 & 0 \\ e^{j\phi_{21}} & e^{j\phi_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{j\phi_{11}} & e^{j\phi_{12}} \\ 0 & 0 & e^{j\phi_{21}} & e^{j\phi_{11}} \end{pmatrix}. \quad (26)$$

O elemento  $S_{12}$  da matriz de espalhamento pode ser real, isto é,  $S_{12} = 1$ . Assim, a porta é definida por um parâmetro real, ou seja, uma diferença de fase não recíproca ( $\phi_{21} - \phi_{12}$ ).

#### 4.5 – Análise de guia de onda retangular.

O guia de onda retangular possui uma menor simetria em comparação com o guia de onda quadrado. O grupo magnético de simetria da seção de um guia de onda retangular preenchido com ferrite e com magnetização azimutal [fig. 12] é dado por  $D_{2h}(C_{2v})$ .

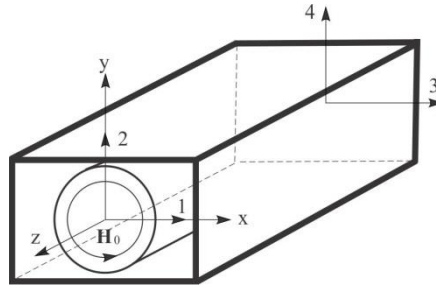


Figura 12. seção de guia de onda retangular,  $\mathbf{H}_0$  é o campo magnético.

Este grupo consiste de quatro elementos e quatro anti-elementos [8]:

- $e$  é o elemento unidade,
- $C_{2z}$  é rotação por  $\pi$  sobre o eixo  $z$ ,
- $\sigma_x$  e  $\sigma_y$  são reflexões no plano passando através do eixo  $z$  do guia de onda e pelos eixos  $x$  e  $y$ .
- $TC_{2x}$ ,  $TC_{2y}$  são antirotações por  $\pi$  sobre o eixo  $x$  e  $y$ , respectivamente.
- $T\sigma_z$  é antireflexão no plano  $z = 0$ ;
- $Ti$  é o anticentro.

Um conjunto de geradores podem ser escolhidos. Por exemplo,  $C_{2z}$ ,  $\sigma_x$ ,  $TC_{2x}$ . Seguindo o mesmo procedimento descrito para o guia de onda quadrado, a matriz de espalhamento para o guia de onda retangular é dado por:

$$\bar{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_{22} & S_{34} \\ 0 & 0 & S_{43} & S_{22} \end{pmatrix}, \quad (27)$$

esta matriz tem seis parâmetros complexos. O maior número de parâmetros da matriz é estipulado pela menor simetria física do guia de onda retangular em comparação com o guia de onda quadrado. As quatro portas são não recíprocas. Como no caso do guia de onda quadrado, as portas 1 e 3, portas 1 e 4, portas 2 e 3, e por fim, as portas 3 e 4, são desacopladas uma das outras.

De forma análoga como realizado para a matriz (19), tratamos a matriz (27). Ou seja, esta matriz foi dividida em dois blocos de matrizes  $2 \times 2$ ,  $\bar{\mathbf{S}}_3$  e  $\bar{\mathbf{S}}_4$ . Seus respectivos autovalores e autovetores são:

$$\lambda_{1,2} = S_{11} \pm \sqrt{S_{12}S_{21}}, \quad (28)$$

$$\lambda_{3,4} = S_{22} \pm \sqrt{S_{34}S_{43}}. \quad (29)$$

$$\mathbf{t}_1 = \begin{pmatrix} \frac{S_{12}}{\sqrt{S_{12}S_{21}}} \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{t}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{S_{12}}{\sqrt{S_{12}S_{21}}} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (30)$$

$$\mathbf{t}_1 = \begin{pmatrix} \frac{S_{34}}{\sqrt{S_{43}S_{34}}} \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{t}_4 = \begin{pmatrix} -\frac{S_{34}}{\sqrt{S_{43}S_{34}}} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Assim, a matriz (27) possui quatro autovalores não degenerados e quatro autovalores diferentes. Usando as condições unitárias, para o guia de ondas sem perdas obtém-se a matriz:

$$\bar{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} 0 & e^{j\phi_2} & 0 & 0 \\ e^{j\phi_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{j\phi_4} \\ 0 & 0 & e^{j\phi_3} & 0 \end{pmatrix}. \quad (32)$$

com superfícies escolhidas corretamente, o elemento  $S_{13}$  da matriz de quatro portas pode ser escolhido para ser real, ou seja,  $S_{12} = 1$ , isto é,  $\phi_{12} = 0$ . Portanto, o guia de onda retangular sem perdas é descrito por 3 parâmetros reais  $\phi_{21}$ ,  $\phi_{34}$ , e  $\phi_{43}$ .

Os autovalores das matrizes  $\bar{\mathbf{S}}$  (19) e (27) são expressos em termos de elementos destas matrizes usando método de teoria de grupo sem resolver a equação para autovalores correspondente [1]. O método de diagonalização aplicado na matriz espalhamento reduz a matriz  $\bar{\mathbf{S}}$  em forma diagonal por blocos devido à transformação unitária (16)-(18).

## CAPÍTULO 5

### CAVIDADES RESSONANTES COM MAGNETIZAÇÃO

#### 5.1 – Grupos magnéticos aplicados a cavidades de ressonadores.

De forma análoga como foi feito no capítulo 4, estudaremos agora alguns tipos de cavidades ressonantes magnetizadas. Estas “caixas” metálicas são úteis para o confinamento de modos eletromagnéticos de frequência bem definida. Utilizaremos a teoria de grupos magnéticos para cada simetria de cavidades ressonantes e com isso, poderemos analisar o grupo de simetria formado para cada caso de geometria estudada. Começaremos com a cavidade cúbica preenchida com ferrite descrita pela figura 13. Neste caso, há perturbação sobre a cavidade, caracterizando desta maneira por um grupo de simetria magnético  $D_{4h}(C_{4h})$ .

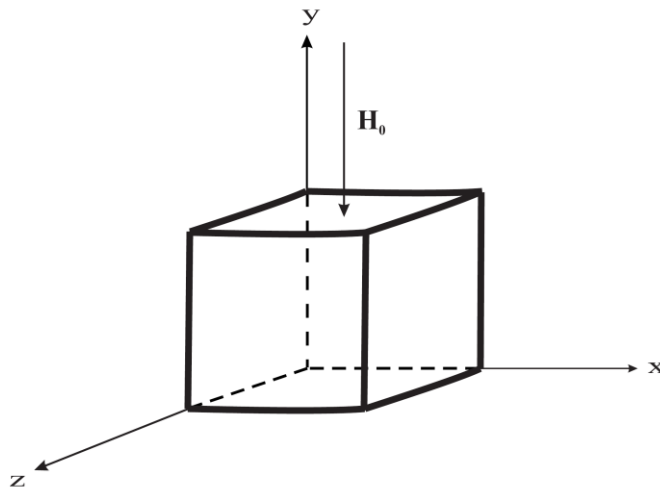


Figura 13. Cavidade cúbica com perturbação de campo magnético  $\mathbf{H}_0$  paralelo ao eixo  $y$ .

A cavidade descrita pela figura 13 apresenta elementos de simetria para este grupo que são:

#### Elementos Unitários

- $e$  é o elemento unidade,
- $2C_{4y}$  são rotações por  $\frac{\pi}{2}$  sobre o eixo  $y$ ,
- $C_{2y}$  são rotações por  $\pi$  sobre o eixo  $y$ ,
- $i$  é o elemento de inversão,
- $2S_4$  são rotações impróprias por  $\frac{\pi}{2}$ ,
- $\sigma_h$  é reflexão no plano horizontal.

### Elementos antiunitários

- $2C_2$  ;
- $2\sigma_v$  ;
- $2\sigma_d$  .

O grupo magnético formado por esta simetria descrita apresenta 14 elementos de simetria e sua tabela de caracteres de corepresentações pode ser calculada utilizando as relações apresentadas no apêndice B deste trabalho.

## CONCLUSÃO

Neste trabalho consideramos aplicações de teoria de grupos para análise de guias de ondas e cavidades ressonantes com meio magnetizado e não magnetizado. Estes guias de onda apresentam geometria circular, quadrada e retangular e, as cavidades ressonantes apresentam geometria cúbica e em forma de paralelepípedo.

Discutimos grupos magnéticos que podem ser usados para analisar estruturas eletromagnéticas ou efeitos na estrutura em meio magnetizado. Os elementos e anti-elementos destes grupos fornecem uma completa descrição da simetria magnética do problema.

Classificamos automodos em cavidades ressonantes com geometria cilíndrica. Estes automodos são dados por  $TE_{mnp}$  e  $TM_{mnp}$ , onde  $m$ ,  $n$  e  $p$  são números inteiros. Com isso, pode-se investigar como os modos de campo elétrico e campo magnético transformam-se sob as operações de simetria e, portanto, podem ser classificados de acordo com as representações irredutíveis desta cavidade.

Foram apresentados também alguns exemplos de cálculo de matriz de espalhamento para guias de onda preenchidos com ferrite e magnetizados azimultamente. As matrizes de espalhamento obtidas (19) e (27) para os modos  $TE_{0n}$  são exatos e eles são válidos para uma dependência radial arbitrária dos parâmetros materiais onde soluções analíticas exatas não são conhecidas. Além disso os autovalores e autofunções das matrizes de espalhamento foram calculados. Dois casos idealizados para guias de onda sem perdas com quatro portas.

Os resultados obtidos podem servir como referência em investigações teóricas e experimentais. Por exemplo, podem ser aplicados para checar precisão de cálculos numéricos em estruturas de guias de onda e de ressonadores.

Publicações relacionadas com este trabalho

1. Dmitriev Victor ; BEIRAO, A. T. M. Checking accuracy of numerical and approximate analytical calculus of symmetrical multiports by group-theoretical methods.. In: Annual International Conference 'Days on Diffraction', 2014, St. Petersburg-Russia "Days on Diffraction", 2014.
2. Dmitriev Victor ; BEIRAO, A. T. M. Barbin, S. E. Scattering matrix analysis of circular, square and rectangular ferrite waveguides with azimuthal magnetization. In: The Sixteenth Biennial IEEE Conference on Electromagnetic Field Computation - CEFC, 2014, Annecy-France. CEFC.

## APÊNDICE A

### A.1– Elementos de Teoria de Grupos

#### A.1.1 – Definição de Grupo Abstrato

Um conjunto  $G$  é um grupo quando uma operação entre os elementos de  $G$  estiver definida e tem as seguintes propriedades [1]:

- a) Se  $u_i$  e  $u_j$  são elementos de  $G$ , então o produto  $u_i u_j$  é também elemento do mesmo grupo;
- b) Possui uma lei associativa de combinação que é  $u_i(u_j u_k) = (u_i u_j)u_k$ ,  $\forall u_i, u_j, u_k \in G$ ;
- c) Contém um elemento unitário  $e$  tal que  $e u_i = u_i$ ;
- d) Para todo  $u_i \in G$ , existe um elemento inverso  $u_i^{-1}$ ; tal que  $u_i^{-1} u_i = e$ .

O número de elementos de um grupo designa a ordem do mesmo. E esta é dada por  $M$ . A ordem do grupo do grupo deve ser finito ou infinito. Se for possível uma mudança infinitesimal de um elemento do grupo para tornar-se outro elemento, o grupo é chamado de contínuo. Ao se usar um pequeno numero de elementos chamados geradores, por meio de um deles, pode-se obter todos os outros elementos do grupo. Isto é, os elementos de um grupo podem ser escritos como um produto de geradores e seus inversos [1].

Em geral, qualquer elemento do grupo comuta apenas com o elemento unidade e com seu inverso. Se todos os elementos do grupo comutam, o grupo é chamado Abelianiano [1].

Qualquer subconjunto  $H$  de  $G$  que, por si só, forma um grupo, é chamado subgrupo. Todas as quatro propriedades da definição de grupos são inerentes sobre o subgrupo  $H$ . Um subgrupo  $H$  de um grupo finito  $G$  tem um índice. Este é um inteiro e definido pelo quociente das ordens do grupo e do subgrupo [1].

Para um dado subgrupo  $H$  de  $G$  pode-se definir o conjunto de elementos  $u_i H u_i^{-1}$ . Este é um subgrupo conjugado de  $G$ . Para todo  $u_i$  o subgrupo  $H$  é chamado de invariante ou subgrupo normal [1].

Coset à direita ou à esquerda são coleções de elementos da forma  $u_i H$  ( $H u_i$ ), onde  $H$  é um subgrupo normal de  $G$  e  $u_i$  é um elemento que não está contido em  $H$ . Os cosets não são subgrupos desde que eles não contenham o elemento unitário  $e$  [1].

Os grupos pontuais de interesse neste trabalho são aqueles em que seus elementos descrevem uma transformação geométrica ou física. Todas as operações de simetria de um objeto formam um grupo pontual [1]. Todos os eixos e planos de um grupo pontual tem pelo menos um ponto de interseção em comum.

Qualquer grupo  $G$  pode ser dividido em classes tal que os elementos em cada classe são conjugados de outro. Dois elementos do grupo  $G$ ,  $u_i$  e  $u_j$  são ditos conjugados se existir um elemento  $u_k$  em  $G$  tal que:

$$u_k u_i u_k^{-1} = u_j \quad (\text{A.1})$$

Os elementos da classe são também chamados como equivalente ou similar.

Para dois grupos independentes  $G'$  de ordem  $M'$  e  $G''$  de ordem  $M''$ , com os elementos  $u'_i$  e  $u''_j$  respectivamente, pode-se identificar um conjunto de elementos  $u'_i u''_j$  para todo  $i$  e  $j$ . Se  $u'_i$  e  $u''_j$  comutam, então, seus produtos formam um novo grupo. Este grupo  $G$  de ordem  $M = M' M''$  é chamado de produto direto de  $G'$  e  $G''$  e denotado por  $G = G' \times G''$ .

A teoria de representações lida com o mapeamento de grupos sobre grupos de operadores lineares (matrizes). Se um conjunto de matrizes quadradas  $\bar{\mathbf{R}}_{u_i}$ , de ordem  $n$ , tem com relação a multiplicação de matriz ordinária, as propriedades (a) – (c) de um grupo  $G$  escrito anteriormente, então este conjunto forma uma representação de  $G$  [1]. Assim, as matrizes  $\bar{\mathbf{R}}_{u_i}$  satisfazem a equação

$$\bar{\mathbf{R}}_{u_i} \cdot \bar{\mathbf{R}}_{u_j} = \bar{\mathbf{R}}_{u_i u_j} \quad (\text{A.2})$$

onde  $u_i$  e  $u_j$  são dois elementos quaisquer do grupo  $G$ . As matrizes quadradas  $\bar{\mathbf{R}}_{u_i}$  são unitárias e não singulares e sua ordem  $n$  é chamada de dimensão da representação. As matrizes  $\bar{\mathbf{R}}_{u_i}$  formam um grupo de transformações lineares.

Se duas representações do grupo  $G$  estão ligados uns aos outros pela relação

$$\bar{\mathbf{R}}'_{u_i} = [\bar{\mathbf{L}}]^{-1} \cdot \bar{\mathbf{R}}_{u_i} \cdot \bar{\mathbf{L}} \quad (\text{A.3})$$

válido para todo  $u_i$ , sendo  $\bar{\mathbf{L}}$  uma matriz não singular fixa, tais representações são chamadas equivalentes.

Uma representação é chamada redutível se pode ser reduzida (decomposta) a uma forma mais simples. Ou seja, é equivalente à representação  $\bar{\mathbf{R}}_{u_i}$  da forma:

$$\bar{\mathbf{R}}_{u_i} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{R}}^1_{u_i} & & \\ & \bar{\mathbf{R}}^\alpha_{u_i} & \\ & & \bar{\mathbf{R}}^\beta_{u_i} \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

A forma mais simples (de menor dimensionalidade) das representações  $\bar{\mathbf{R}}^\alpha_{u_i}$  que não pode mais ser reduzida, são chamadas de representações irredutíveis do grupo [1]. As representações irredutíveis são denotadas como  $\Gamma_k(u_i)$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ . O número de



representações equivalentes para grupos de ordem finita é igual ao número de classes do grupo.

Na matriz acima (A.4) apresentam-se distintas representações irredutíveis de  $\beta$ . O número de vezes  $n_{\Gamma_k}$  de uma determinada representação irredutível  $\Gamma_k$  está contida na matriz (36) e é definido pela seguinte relação

$$n_{\Gamma_k} = \frac{1}{M} \sum_{u_i} \chi(u_i) \chi_{ir}(u_i)^* \quad (\text{A.5})$$

onde  $\chi(u_i)$  é o caracter da representação irredutível;  $\chi_{ir}(u_i)$  é o caracter da representação irredutível; E a soma é sobre todos os elementos do grupo. O caracter da representação do grupo é o traço da matriz correspondente, isto é, a soma dos elementos diagonais da matriz. Uma descrição detalhada dos nomes das representações irredutíveis e as tabelas de caracteres apropriadas podem ser encontradas em [10, 11].

Simbolicamente, a matriz (A.4) pode ser escrita como

$$\bar{\mathbf{R}}_{ui} = n_{\Gamma_1} \Gamma_1(u_i) \oplus n_{\Gamma_2} \Gamma_2(u_i) \oplus \dots \oplus n_{\Gamma_\alpha} \Gamma_\alpha(u_i) \oplus \dots \oplus n_{\Gamma_\beta} \Gamma_\beta(u_i), \quad (\text{A.6})$$

onde o símbolo  $\oplus$  designa uma soma direta.

Em um espaço n-dimensional podemos criar vetores de base (funções)  $\bar{\mathbf{V}}_1, \bar{\mathbf{V}}_2, \dots, \bar{\mathbf{V}}_l, \dots, \bar{\mathbf{V}}_N$ , tal que para toda operação de simetria  $u_i$ , eles se transformam na seguinte relação:

$$u_i \bar{\mathbf{V}}_l = \bar{\mathbf{V}}_l \bar{\mathbf{R}}_{ui}. \quad (\text{A.7})$$

Esta relação associa a transformação de simetria correspondente a um elemento do grupo  $u_i$  e uma matriz  $\bar{\mathbf{R}}_{ui}$  que depende da escolha da base.

Vetores de base pertencentes a duas representações irredutíveis diferentes ou a duas linhas diferentes da mesma representação são ortogonais.

Uma representação matricial arbitrária  $\bar{\mathbf{R}}'_{u_i}$  pode ser decomposta na forma blocos na diagonal, igual a matriz (A.4), usando uma transformação de similaridade da forma

$$\bar{\mathbf{R}}_{ui} = [\bar{\mathbf{U}}^*]^t \cdot \bar{\mathbf{R}}'_{u_i} \cdot \bar{\mathbf{U}} \quad (\text{A.8})$$

onde  $\bar{\mathbf{U}}$  é uma matriz formada por um conjunto de base vetorial.

Geralmente, um conjunto de vetores bases N-dimensional que carregam uma representação particular do grupo pode ser escolhido diferentemente, mas estes conjuntos não diferem fundamentalmente, pois eles são relacionados por uma transformação de similaridade.

Um vetor arbitrário  $\mathbf{V}$  pode ser expresso como uma soma de vetores que atuam como bases vetoriais  $\mathbf{V}_l^{(k)}$  em várias representações irredutíveis. Os vetores de base para a k-ésima representação irredutível podem ser encontrados pela relação

$$\sum_{u_i} \Gamma_{lm}^*(u_i) u_i \mathbf{V} \sim \mathbf{V}_l^{(k)} \quad (\text{dado } m; l = 1, 2, \dots, g_k) \quad (\text{A.9})$$

onde o sinal  $\sim$  significa uma transformação, isto é, fornece uma representação idêntica; A soma em (41) é sobre todos os M elementos do grupo;  $\Gamma_{lm}(u_i)$  são elementos da k-ésima representação irredutível distintas; e  $g_k$  é a dimensionalidade.

## APÊNDICE B

### B.1 - Corepresentações.

A seguir foram calculados os caracteres das tabelas de corepresentações irredutíveis para os casos de guia de onda quadrado preenchido com ferrite e submetido à magnetização azimutal [fig. 6(b), Tabela 12] e também para o caso onde a magnetização da estrutura gera um quadrupolo do campo magnético [fig. 6(d), Tabela 14]. Para se calcular os caracteres das tabelas de corepresentações irredutíveis do grupo  $C_{4v}(C_4)$  e do grupo  $C_{4v}(C_{2v})$  deve-se identificar o tipo de corepresentação irredutível. No caso para o grupo  $C_{4v}(C_4)$  temos o caso (a) e para  $C_{4v}(C_{2v})$  teremos o caso (c), ambos com  $P = 1$ .

### B.2 - Tipos de corepresentações irredutíveis.

Seja  $R$  um elemento unitário do subgrupo  $C_4$  ou  $C_{2v}$ ,  $A$  e  $B$  são elementos anti unitários dos grupos magnéticos  $C_{4v}(C_4)$  ou  $C_{4v}(C_{2v})$ ,  $\Delta$  é a representação irredutível de  $R$ .

- caso (a)

$$\Delta(R) = P\Delta^*(A^{-1}RA)P^{-1}, \quad (\text{B.1})$$

$$D''(R) = \Delta(R), \quad (\text{B.2})$$

$$D''(B) = \Delta(BA^{-1})P. \quad (\text{B.3})$$

- caso (b)

$$\Delta(R) = P\Delta^*(A^{-1}RA)P^{-1}, \quad (\text{B.4})$$

$$D'(R) = \begin{pmatrix} \Delta(R) & 0 \\ 0 & \Delta(R) \end{pmatrix}, \quad (\text{B.5})$$

$$D'(B) = \begin{pmatrix} 0 & -\Delta(BA^{-1})P \\ \Delta(BA^{-1})P & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.6})$$

- caso (c)

$$D(R) = \begin{pmatrix} \Delta(R) & 0 \\ 0 & \bar{\Delta}(R) \end{pmatrix}, \quad (\text{B.7})$$

$$\bar{\Delta}(R) = \Delta^*(A^{-1}RA), \quad (\text{B.8})$$

$$D(B) = \begin{pmatrix} 0 & \Delta(BA) \\ \overline{\Delta(BA^{-1})} & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.9})$$

onde o sinal \* significa complexo conjugado.

### B.3 - Exemplos de cálculos de corepresentações.

A seguir realizaremos dois exemplos de cálculos de caracteres das tabelas de corepresentações irredutíveis dos grupos  $C_{4v}(C_4)$  e  $C_{4v}(C_{2v})$ , respectivamente. O subgrupo  $C_4$  apresenta a seguinte tabela de representações irredutíveis:

Tabela 24. Tabela de representações irredutíveis do grupo  $C_4$ .

$C_4$	e	$C_2$	$C_4$	$C_4^{-1}$
$\Gamma_1$	1	1	1	1
$\Gamma_2$	1	1	-1	-1
$\Gamma_3$	1	-1	i	-i
$\Gamma_4$	1	-1	-i	i

Para se calcular os caracteres da tabela de corepresentações irredutíveis do grupo magnético  $C_{4v}(C_4)$  devemos utilizar o caso (a) descrito no item B.2. Além disso, escolhemos e fixamos um elemento anti-unitário  $A = T\sigma_x$  do grupo magnético estudado e escolhemos também o elemento anti-unitário  $B = T\sigma_x$ . Utilizando a equação (B.3) temos:

$$D'(B) = \Delta(BA^{-1}) = \Delta[T\sigma_x(T\sigma_x)^{-1}] = \Delta(e), \quad (\text{B.10})$$

$$D''(T\sigma_x) = \Delta(e). \quad (\text{B.11})$$

Façamos agora  $A = T\sigma_x$  e  $B = T\sigma_y$  obtemos:

$$\overline{\Delta}(R) = \Delta^*(A^{-1}RA) = \Delta^*[(TC_4)^{-1}\sigma_x TC_4] = \Delta^*[C_4^{-1}\sigma_x C_4] = \Delta^*(\sigma_y), \quad (\text{B.12})$$

$$\overline{\Delta}(\sigma_x) = \Delta^*(\sigma_y). \quad (\text{B.13})$$

$$D'(B) = \Delta(BA^{-1}) = \Delta[T\sigma_y(T\sigma_x)^{-1}] = \Delta(C_2), \quad (\text{B.14})$$

$$D'(T\sigma_y) = \Delta(C_2). \quad (\text{B.15})$$

Para  $A = T\sigma_x$  e  $B = T\sigma_{d_1}$  teremos:

$$D'(B) = \Delta(BA^{-1}) = \Delta[T\sigma_{d_1}(T\sigma_x)^{-1}] = \Delta(C_4), \quad (\text{B.16})$$

$$D'(T\sigma_{d1}) = \Delta(C_4). \quad (\text{B.17})$$

E por fim, façamos  $A = T\sigma_x$  e  $B = T\sigma_{d2}$  logo:

$$D'(B) = \Delta(BA^{-1}) = \Delta[T\sigma_{d2}(T\sigma_x)^{-1}] = \Delta(C_2), \quad (\text{B.18})$$

$$D'(T\sigma_{d2}) = \Delta(C_2). \quad (\text{B.19})$$

Portanto, obtemos os caracteres da tabela de corepresentações irredutíveis do grupo magnético  $C_{4v}(C_4)$  [Tabela 11] a partir da representação irredutível do elemento unitário pertencente ao subgrupo  $C_4$  [Tabela 19].

Analogamente será feito para o grupo  $C_{4v}(C_{2v})$ , porém, neste caso utilizaremos o caso (c) do ítem B.2. É calculado os caracteres da tabela de Corepresentações irredutíveis do grupo magnético  $C_{4v}(C_{2v})$  [Tabela 14] a partir da representação irredutível do elemento unitário pertencente ao subgrupo  $C_{2v}$  [Tabela 16]. Fixando o anti elemento  $A = TC_4$  e escolhendo o elemento unitário  $R = \sigma_x$  vamos obter:

$$\bar{\Delta}(R) = \Delta^*(A^{-1}RA) = \Delta^*[(TC_4)^{-1}\sigma_x TC_4] = \Delta^*[C_4^{-1}\sigma_x C_4] = \Delta^*(\sigma_y), \quad (\text{B.20})$$

$$\bar{\Delta}(\sigma_x) = \Delta^*(\sigma_y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.21})$$

Escolhendo agora  $R = C_2$  temos:

$$\bar{\Delta}(R) = \Delta^*(A^{-1}RA) = \Delta^*[(TC_4)^{-1}C_2 TC_4] = \Delta^*(C_2), \quad (\text{B.22})$$

$$\bar{\Delta}(C_2) = \Delta^*(C_2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.23})$$

Para  $R = \sigma_y$  obtemos:

$$\bar{\Delta}(R) = \Delta^*(A^{-1}RA) = \Delta^*[(TC_4)^{-1}\sigma_y TC_4] = \Delta^*(\sigma_x), \quad (\text{B.24})$$

$$\bar{\Delta}(\sigma_y) = \Delta^*(\sigma_x) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.25})$$

Agora utilizando a equação (B.9) no caso (c) podemos obter as corepresentações bidimensionais irredutíveis. Fixando  $A = TC_4$  e escolhendo  $B = TC_4^{-1}$  calculamos:

$$\Delta(BA) = \Delta[(TC_4)^{-1}TC_4] = \Delta(e), \quad (\text{B.26})$$

$$\bar{\Delta}(BA^{-1}) = \bar{\Delta}[(TC_4)^{-1}(TC_4)^{-1}] = \bar{\Delta}(C_2), \quad (\text{B.27})$$

$$D(B) = D(TC_4^{-1}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.28})$$

Para  $B = TC_4^{-1}$  temos:

$$\Delta(BA) = \Delta[(TC_4)^{-1}TC_4] = \Delta(e), \quad (\text{B.29})$$

$$\bar{\Delta}(BA^{-1}) = \bar{\Delta}[(TC_4)^{-1}(TC_4)^{-1}] = \bar{\Delta}(C_2), \quad (\text{B.30})$$

$$D(B) = D(TC_4^{-1}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.31})$$

Para  $B = TC_4$  teremos:

$$\Delta(BA) = \Delta[TC_4TC_4] = \Delta[C_4C_4] = \Delta(C_2), \quad (\text{B.32})$$

$$\bar{\Delta}(BA^{-1}) = \bar{\Delta}[(TC_4)(TC_4)^{-1}] = \bar{\Delta}(e), \quad (\text{B.33})$$

$$D(B) = D(TC_4) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.34})$$

Escolhendo  $B = T\sigma_{d_1}$  temos:

$$\Delta(BA) = \Delta[T\sigma_{d_1}TC_4] = \Delta[\sigma_{d_1}C_4] = \Delta(\sigma_x), \quad (\text{B.35})$$

$$\bar{\Delta}(BA^{-1}) = \bar{\Delta}[(T\sigma_{d_1})(TC_4)^{-1}] = \bar{\Delta}(\sigma_{d_1}C_4^{-1}) = \bar{\Delta}(\sigma_y), \quad (\text{B.36})$$

$$D(B) = D(T\sigma_{d_1}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.37})$$

E por fim, façamos  $B = T\sigma_{d_2}$  teremos.

$$\Delta(BA) = \Delta[T\sigma_{d_2}TC_4] = \Delta[\sigma_{d_2}C_4] = \Delta(\sigma_y), \quad (\text{B.38})$$

$$\bar{\Delta}(BA^{-1}) = \bar{\Delta}[(T\sigma_{d_2})(TC_4)^{-1}] = \bar{\Delta}(\sigma_{d_2}C_4^{-1}) = \bar{\Delta}(\sigma_x), \quad (\text{B.39})$$

$$D(B) = D(T\sigma_{d_2}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.40})$$

## BIBLIOGRAFIA

- [1] A. A. Barybin and V. A. Dmitriev, “Modern Electrodynamics and Coupled-Mode Theory: Application to Guided-Wave Optics”, Rinton, 2002.
- [2] R. S. Mueller and F. J. Rosenbaum, “Propagation along azimuthally-magnetized ferrite-loaded circular waveguide”, *J. Appl. Phys.* 48, (1977), pp. 2601-2603.
- [3] K. P. Ivanov and G. N. Georgiev, “Some properties of the circular waveguides with azimuthally magnetized ferrite”, *J. Appl. Phys.* 67, (1990), pp. 6529-6537.
- [4] M. Nikolova Georgieva–Gross and G. Nikolov Georgiev, “Advances in the Theory of the Circular Waveguide with an Azimuthally Magnetized Ferrite Cylinder and Dielectric Toroid”, *PIERS Proc. Taipei*, March (2013), pp. 25–28.
- [5] P. J. B. Clarricoats, and A. D. Olver, “Propagation in anisotropic radially stratified circular waveguides”, *Electron. Lett.*, 2, (1966), pp. 37–39.
- [6] I. V. Lindell, Variational, “Methods for nonstandard eigenvalue problems in waveguide and resonator analysis”, *IEEE Trans. Microwave Theory Techn.*, 30, (1982), pp. 1194–1204.
- [7] R. E. Eaves and D. M. Bolle, “Perturbation theoretic calculations of differential phase shifts in ferrite-loaded circularly cylindrical waveguides in the  $TE_{01}$  mode”, *Electron. Lett.*, 2, (1966), pp. 275–277.
- [8] M. R. Rawashdeh, N, Dib, “Full-wave analysis of azimuthally magnetized ferrite-loaded circular structures using the onedimensional finite difference frequency domain method”, *Int. J. RF and Microwave CAE*, 19, (2009), pp. 397–404.
- [9] G. Lyubarskii, “The Application of Group Theory in Physics”, Pergamon Press, New York, 1960.
- [10] E. P. Wigner. “Group Theory and Its Application to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra”, Academic Press, New York, 1959.
- [11] R. McWeeny. “Symmetry: An Introduction to Group Theory and its Applications”, Pergamon Press, New York, 1963.
- [12] M. Hamermesh, “Group Theory and its Application to Physical Problems”, Addison-Wesley, Reading, MA, 1962.
- [13] Wu-Ki Tung, “Group Theory in Physics”, World Scientific, Philadelphia, 1985.
- [14] J. O. Dimmock and R. G. Wheeler. “Irreducible Representations of Magnetic Groups”, *J. Phys. Chem. Solids* 23, (1962), pp. 729-741.
- [15] A. M. Prokhorov, “Physical Encyclopedic Dictionary”, Soviet Encyclopedia, Moscow, 1978 (in Russian).
- [16] J. D. Jackson, “Classical Electrodynamics”, Wiley, New York, 1999.

- [17] V. Dmitriev, “Color group approach to symmetrical ferrite devices with polarization effects”, IEEE. Microwave Theory Techn., 44, (1996), pp. 630-631.
- [18] S. Sakanaka. “Classification of eigenmodes in rf cavities using the group theory”, Physical Review Special Topics – Accelerators and Beams 8, (2005), pp. 1-11.
- [19] Arthur P. Cracknell. Corepresentations of Magnetic Point Groups. Progress of Theoretical Physics, Vol. 35, February (1966), pp. 196-213.
- [20] Paul R. McIsaac. “Symmetry-Induced Modal Characteristics of Uniform Waveguides: Summary of Results, Transactions on microwave theory and techniques”, (IEEE), Vol. 23, n° 5, May (1975), pp. 421-433.